Introduction aux signaux et systèmes
Lecture 3
n-dimensional closed systems

Alessio Franci, Guillaume Drion, Julien Brandoit, Julien Vanderheyden

University of Liege

February 21, 2026

Notations vectorielles et matricielles

Vecteurs et matrices

Vecteur colonne (attention, changement de notation!!)

$$\underline{x} = (x_i)_{i=1,n} \in \mathbb{R}^n \text{ ou } \mathbb{C}^n.$$

Matrice

$$A = (a_{ik})_{i=1,n;\, k=1,r}$$

est une matrice de type $n \times r$.

Les vecteurs sont supposés être des vecteurs colonnes sauf mention contraire. Dans le texte, on écrit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ comme un vecteur ligne même s'il représente un vecteur colonne.

Vecteurs et matrices particulières

Vecteur zéro et matrice zéro

$$\underline{0}, \qquad \underline{\underline{0}}.$$

Produit matriciel et transposée

$$A = B\,C \quad \text{(produit lignes} \times \text{colonnes)}, \qquad A^T = \text{matrice transposée.}$$

Matrices diagonales et à blocs

Matrice diagonale

$$D = \operatorname{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n] = (d_{ik}), \qquad d_{ik} = 0 \text{ si } i \neq k.$$

Matrice diagonale à blocs

$$Q = \operatorname{diag}\left[\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}, \ldots\right].$$

Dérivées totales

Les dérivées totales le long d'une solution d'un système dynamique continu :

$$\dot{\underline{x}} = \frac{d\underline{x}}{dt}, \qquad \ddot{\underline{x}} = \frac{d^2\underline{x}}{dt^2}.$$

Exponentielle de matrices

Nous voulons généraliser la fonction exponentielle de manière à ce qu'elle soit définie pour des arguments matriciels.

Tout comme la fonction exponentielle réelle résout l'équation différentielle

$$\dot{x} = x,$$

l'exponentielle de matrices résout le système dynamique continu linéaire le plus général

$$\underline{\dot{x}} = A\underline{x}\,, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

Les propriétés de l'exponentielle de matrices sont analogues à celles de l'exponentielle ordinaire, avec quelques différences importantes dues à la non-commutativité du produit matriciel.

Dimension 1 — Formulation intégrale

Considérons le système dynamique

$$\dot{x} = ax, \quad a \in \mathbb{R}, \quad x(0) = x_0.$$

Dans sa forme intégrale il devient

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \dot{x}(s)\, ds = x_0 + \int_0^t a\, x(s)\, ds.$$

En utilisant la méthode des approximations successives

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0 \\ x_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t a\, x_k(s)\, ds \end{cases}$$

Dimension 1 — Calcul explicite

on obtient

$$x_1(t) = (1 + at)x_0, \qquad x_2(t) = \left(1 + at + \frac{a^2t^2}{2}\right) x_0 \,,$$

et en général (par induction)

$$x_k(t) = \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{a^i t^i}{i!}\right) x_0.$$

Remarquons que par $k \to \infty$ on obtient

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i t^i}{i!} = e^{at} \,.$$

On a donc que $x(t) = x_0 \, e^{at}$ est effectivement la (seule) solution de $\dot{x} = ax$ avec $x(0) = x_0$.

Dimension n — Formulation intégrale

De façon similaire, considérons maintenant le système

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x}, \qquad \underline{x}(0) = \underline{x}_0, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Dans sa forme intégrale il devient

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_0 + \int_0^t A\,\underline{x}(s)\,ds.$$

Et en utilisant la méthode des approximations successives

$$\begin{cases} \underline{x}_0(t) = \underline{x}_0 \\ \underline{x}_{k+1}(t) = \underline{x}_0 + \int_0^t A\,\underline{x}_k(s)\,ds \end{cases}$$

Dimension n — Calcul explicite

ce qui nous donne

$$\underline{x}_1(t) = (I + At)\underline{x}_0,$$

$$\underline{x}_2(t) = \left(I + At + \frac{A^2t^2}{2}\right)\underline{x}_0\,,$$

et en général

$$\underline{x}_k(t) = \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{A^i t^i}{i!}\right)\underline{x}_0.$$

Remarque: ces calculs sont identiques au cas scalaire, mais la non-commutativité du produit matriciel impose de garder $\underline{x}_0$ à droite.

Définition de l'exponentielle de matrice

Donc, la solution (que nous savons déjà être unique) est donnée par la série de fonctions

$$\underline{x}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} \underline{x}_0 = e^{At} \underline{x}_0 \,.$$

Étant donnée une matrice B, cette solution nous amène à définir

$$\exp(B) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^i}{i!},$$

à condition que la série soit convergente.

Exemple — $A = \lambda I$

Si $A = \lambda I$:

$$A^k = \lambda^k I, \qquad \exp(At) = e^{\lambda t} I.$$

La solution de $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$ est donc :

$$\underline{x}(t) = e^{\lambda t}\underline{x}_0.$$

Exemple — Matrice diagonale

Si

$$A = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n],$$

alors

$$A^k = \mathrm{diag}[\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k],$$

et donc

$$\exp(At) = \mathrm{diag}\left[e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\right].$$

Il vient que la solution du système $\dot{x} = Ax$ est

$$x_i(t) = e^{\lambda_i t} c_i, \quad i = 1, \ldots, n\,,$$

avec, par unicité, $c_i = x_i(0)$.

Exemple — Matrice nilpotente

Supposons que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Nous pouvons alors observer que $A^2 = 0$.

Il s'en suit que

$$e^{At} = I + At = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} ,$$

et que la solution du système $\dot{x} = 0, \ \dot{y} = x$ est donnée par

$$x(t) = x_0, \qquad y(t) = y_0 + x_0 t.$$

Convergence

Convergence de l'exponentielle

Soit A une matrice $n \times n$ quelconque et considérons la série exponentielle

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j t^j}{j!}.$$

Propriétés :

1. Elle converge pour tout $t \in \mathbb{R}$, uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.
2. La limite est une fonction continue de t, notée $\exp(At)$.

Convergence de l'exponentielle — Esquise de démonstration

Par les propriétés de la norme uniforme[1]

$$\frac{\|(At)^j\|}{j!} \leq \frac{\|A\|^j\,|t|^j}{j!}. \qquad (*)$$

Remarquons que la série

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|A\|^j |t|^j}{j!} = e^{\|A\||t|}$$

est convergente et donc, en utilisant (*), la série $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j t^j}{j!}$ est convergente aussi. De plus, la convergence est uniforme sur de compacts de $\mathbb{R}$.

[1] $||A|| = \max_{||\underline{x}||=1} ||A\underline{x}||$.

Convergence de l'exponentielle (3)

On définit donc

$$\exp(At) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{A^j t^j}{j!}$$

qui par la théorème de convergence de fonctions continues est continue sur tout compact de $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$.

C.Q.F.D.

Conséquences

Ce théorème garantit l'existence du flux intégral (solution) de tout système dynamique linéaire :

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x}, \qquad \underline{x}(t) = \exp(At)\,\underline{x}(0).$$

Mais le calcul explicite de $\exp(At)$ n'est pas immédiat. Certain méthodes de calcul seront développées dans plus en bas.

Dérivée de l'exponentielle matricielle

La fonction matricielle $\exp(At)$ est dérivable, et :

$$\frac{d}{dt}\exp(At) = A\exp(At) = \exp(At)\,A.$$

Idée de la preuve : Utiliser la définition de la dérivée comme limite du rapport :

$$\frac{\exp(A(t+h)) - \exp(At)}{h},$$

puis la série exponentielle pour $\exp(Ah)$.

Comme A commute avec A^r, il commute avec chaque terme de la série, donc avec la limite.

Valeurs propres réelles

Le calcul de l'exponentielle d'une matrice peut être effectué dans un système de référence différent. Si ce nouveau repère est construit à partir des vecteurs propres de la matrice donnée, le calcul devient plus simple ; pour une matrice diagonalisable (sur le corps réel), on se ramène à calculer l'exponentielle d'une matrice diagonale.

Changements de coordonnées (1)

Considérons le système dynamique linéaire

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x}.$$

Appliquons un changement linéaire de coordonnées

$$\underline{y} = B\underline{x},$$

où B est une matrice $n \times n$.

On suppose que B est inversible, $\det B \neq 0$. Alors

$$\dot{\underline{y}} = B\,\dot{\underline{x}} = B\,A\,\underline{x} = BAB^{-1}\underline{y} = C\underline{y},$$

où $C = BAB^{-1}$.

Changements de coordonnées (2)

La solution dans le nouveau système, avec $\underline{y}(0) = \underline{y}_0$, est :

$$\underline{y}(t) = \exp(Ct)\,\underline{y}_0, \qquad \underline{y}_0 = B\underline{x}_0.$$

La relation entre les solutions est

$$\underline{x}(t) = B^{-1}\underline{y}(t) = B^{-1}\exp(Ct)\,B\,\underline{x}_0.$$

De plus,

$$(BAB^{-1})^i = BA^iB^{-1},$$

d'où

$$\exp(Ct) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(BAB^{-1})^i t^i}{i!} = B\exp(At)B^{-1}.$$

Interprétation

Les matrices des flux intégraux sont donc également conjuguées, et la conjugaison est effectuée à l'aide de la même matrice B que celle utilisée dans le changement de coordonnées.
On peut donc toujours étudier un système dynamique linéaire dans un système de référence quelconque ; la matrice A se transforme par conjugaison. Il est alors naturel de chercher un système où la matrice est simple (diagonale, triangulaire), de résoudre dans ce repère, puis de revenir au repère de départ.

Exercice — Changement de coordonnées

Trouver le changement linéaire qui transforme

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(Solution)

Diagonalisation — Définition

Une matrice carrée A de taille $n \times n$ est dite **diagonalisable** s'il existe une base

$$\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$$

de vecteurs propres, avec valeurs propres réelles $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Dans ce cas :

$$BAB^{-1} = D = \mathrm{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n].$$

Diagonalisation — Preuve matricielle

Comme

$$A\underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i,$$

en posant $V = [\underline{v}_1 \cdots \underline{v}_n]$, matrice inversible car les $\underline{v}_i$ sont linéairement indépendants,

$$AV = VD \iff V^{-1}AV = D.$$

Ainsi, $B = V^{-1}$ est la matrice du changement de coordonnées $\underline{y} = B\underline{x}$.

Système diagonalisable — Solution

Si A est diagonalisable, alors les orbites du système $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$ s'expriment comme combinaisons linéaires d'exponentielles $\exp(\lambda_i t)$.

En effet, dans les coordonnées propres $\underline{y} = V^{-1}\underline{x}$,

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i, \qquad y_i(t) = e^{\lambda_i t} y_i(0).$$

Ainsi qu'on obtient

$$\underline{y}(t) = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})\underline{y}_0,$$

$$\underline{x}(t) = V \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})\, V^{-1}\underline{x}_0.$$

Dimension 2 — Équation caractéristique

En dimension 2,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

l'équation caractéristique

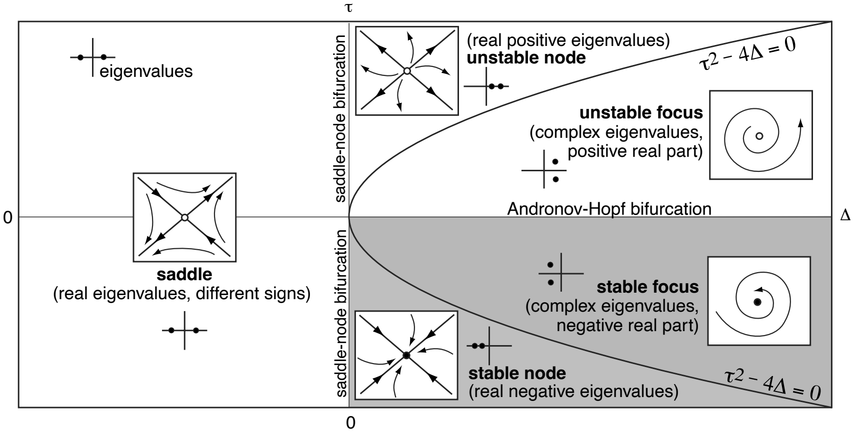
$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

donne

$$\lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A = 0\,,$$

dont le discriminant est donné par

$$\Delta = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} = (\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A\,.$$



τ
Δ
0
0
eigenvalues
saddle-node bifurcation
saddle-node bifurcation
(real positive eigenvalues)
unstable node
τ2 – 4Δ = 0
unstable focus
(complex eigenvalues,
positive real part)
Andronov-Hopf bifurcation
saddle
(real eigenvalues, different signs)
stable focus
(complex eigenvalues,
negative real part)
stable node
(real negative eigenvalues)
τ2 – 4Δ = 0

Dimension 2 — Cas réel et cas complexe

- $\Delta > 0$: deux valeurs propres réelles $\rightarrow$ deux vecteurs propres réels $\rightarrow$ diagonalisation réelle possible.
- $\Delta < 0$: valeurs propres complexes $\rightarrow$ pas de diagonalisation réelle.

Exercice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Écrire explicitement le flux intégral.

Cas $\Delta = 0$

Deux exemples :

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \underline{z} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

A est déjà diagonale. $\underline{z}$ ne l'est pas: tous les vecteurs propres sont colinéaires à $(1, 0)$.
Pour $n > 2$, décider la diagonalisabilité peut devenir difficile; les matrices symétriques, elles, sont toujours diagonalisables.

Nœuds et selles — Mise en forme canonique

Si A a deux valeurs propres réelles distinctes a et b, il existe $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ tels que:

$$A\underline{v}_1 = a\underline{v}_1, \qquad A\underline{v}_2 = b\underline{v}_2.$$

Dans la base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$:

$$BAB^{-1} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix},$$

on obtient le système canonique

$$\dot{x} = ax, \qquad \dot{y} = by.$$

Nœuds et selles — trajectoires

Le flux du système canonique

$$x(t) = e^{at}x_0, \qquad y(t) = e^{bt}y_0,$$

determine ses trajectoires (en éliminant t):

$$\frac{x^b}{y^a} = \frac{x_0^b}{y_0^a} = \text{cste}.$$

Classification — Cas $a < 0, b < 0$

Toutes les orbites (sauf l'origine) vont à l'infini quand $t \to -\infty$ et tendent vers l'origine pour $t \to +\infty$. C'est a dire, l'origine est stable.

Si $a \neq b$, les trajectoires

$$y = y_0 \left(\frac{x}{x_0} \right)^{b/a}$$

sont tangentes a l'origine a un des axes

- $b < a < 0$: tangentes a l'axe horizontale $\{y = 0\}$.
- $a < b < 0$: tangentes a l'axe vertical $\{x = 0\}$.

On parle dans ces deux cas d'un équilibre de type nœud.

Si $a = b < 0$, le trajectoires sont des droites qui passe pour l'origine. On parle dans ces deux cas d'un équilibre de type nœud dégénéré.

Classification — Cas $b < 0 < a$ (selle)

Il y a deux trajectoires spéciales:

- $y = 0$, pour $x_0 = 0$, correspondant à la direction stable
- $x = 0$, pour $x_0 = 0$, correspondant à la direction instable

Pour $x_0, y_0 \neq 0$, les trajectoires satisfont

$$y = y_0 \left(\frac{x_0}{x}\right)^{-b/a} .$$

Elle sont asymptotiques

- à l'axe x quand $t \to +\infty$,
- à l'axe y quand $t \to -\infty$.

Autres cas + exercice

Si $a = 0$ y $b \neq 0$ les trajectoires sont des droites $x = \text{cste}$. Tandis que si $a \neq 0$ y $b = 0$ les trajectoires sont des droites $y = \text{cste}$.

Exercice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}.$$

Décrire les trajectoires dans le plan (x_1, x_2).

Valeurs propres complexes

Valeurs propres complexes — Sommaire

Si la matrice d'un système dynamique linéaire a des valeurs propres complexes, elle n'est pas diagonalisable (sur le corps réel). En revanche, elle peut l'être sur le corps complexe.
À chaque paire de valeurs propres complexes conjuguées correspond un bloc 2×2 que l'on peut mettre sous une forme canonique. Ces formes canoniques constituent un modèle du corps complexe.

Forme matricielle des nombres complexes (1)

Parmi les matrices réelles 2×2, considérons le sous-espace $\mathbb{C}$ de dimension 2 des matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a\,I + b\,J,$$

où

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On peut identifier $\mathbb{C}$ avec le sous-espace généré par I et J. Observons que $J^2 = -I$ (structure complexe).

Forme matricielle des nombres complexes (2)

Toute matrice de $\mathbb{C}$ s'écrit de trois façons :

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a\,I + b\,J \;\simeq\; (a,b).$$

La forme $a\,I + b\,J$ donne la représentation algébrique; la forme (a,b) donne la représentation vectorielle cartésienne (plan d'Argand–Gauss).

L'ensemble $\mathbb{C}$ est fermé pour l'addition, la multiplication scalaire, et le **produit matriciel**. En effet :

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ bc + ad & -bd + ac \end{bmatrix} \in \mathbb{C}.$$

Produit commutatif dans $\mathbb{C}$

Fait notable: le produit dans $\mathbb{C}$ est **commutatif** :

$$(a\, I + b\, J)(c\, I + d\, J) = (c\, I + d\, J)(a\, I + b\, J),$$

ce qui n'est pas vrai en général pour les matrices.

I joue le rôle de l'unité réelle et J celui de l'unité imaginaire: si $z = a\, I + b\, J$, alors $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$.

On identifie $\lambda I \in \mathbb{C}$ simplement à $\lambda \in \mathbb{R}$ et on écrit $z = a + Jb$.

Mélange des représentations

Remarquons que l'on peut mélanger les representations sans contradiction. Si $z = x + Jy$, $w = u + Jv$, on peut calculer $w\,z$ en prenant w comme matrice et z comme vecteur colonne:

$$w\,z = \begin{bmatrix} u & -v \\ v & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ux - vy \\ vx + uy \end{bmatrix}.$$

Module et propriétés (1)

Pour toute matrice de $\mathbb{C}$,

$$\det \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a^2 + b^2 \geq 0.$$

On définit le **module** de $z \in \mathbb{C}$ par

$$|z| = \sqrt{\det z}.$$

Alors:

$$|z| = 0 \iff z = 0\, I + 0\, J, \qquad |\,\alpha z\,| = |\alpha|\,|z|, \qquad |z + w| \leq |z| + |w|.$$

Module et propriétés (2)

En coordonnées cartésiennes $z = (x, y)$, on a $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (longueur dans le plan d'Argand-Gauss). Si $z = (a, 0)$ est réel, alors $|z| = |a|$.

Pour $|z| = r > 0$, il existe une unique matrice de rotation telle que

$$z = r \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

On définit **l'argument** $\arg(z)$ comme l'ensemble des angles θ associés.

Module et argument d'un produit

Pour $z, w \in \mathbb{C}$:

$$|zw| = \sqrt{\det(zw)} = \sqrt{\det z \; \det w} = |z|\,|w|.$$

Si

$$z = r(\cos\theta\, I + \sin\theta\, J), \qquad w = s(\cos\phi\, I + \sin\phi\, J),$$

alors

$$zw = (rs)\,[\cos(\theta+\phi)\, I + \sin(\theta+\phi)\, J].$$

Interprétation: composition de rotations expansive/contractive $\Rightarrow$ somme des angles et multiplication de coefficients de expansion/contraction.

Conjugué complexe

Pour $z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a\,I + b\,J \simeq (a,b)$, on définit le **conjugué** par la transposée:

$$\overline{z} = z^T = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = a\,I - b\,J \simeq (a,-b).$$

Alors $\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)$, $|\overline{z}| = |z|$, $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$, et

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{zw} = \overline{w}\,\overline{z} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Inverse, puissances

Si $z \neq 0$,

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Donc $|z^{-1}| = |z|^{-1}$, $\arg(z^{-1}) = -\arg(z)$.

Pour la puissance entière on a $z^0 = 1$, $z^{n+1} = z^n z$. Et donc

$$|z^n| = |z|^n, \qquad \arg(z^n) = n \arg(z),$$

valable aussi pour $n < 0$ via $z^{-k} = (z^{-1})^k$.

Valeurs propres d'un élément de $\mathbb{C}$

Soit $z = a\,I + b\,J \in \mathbb{C}$. Les racines de

$$\det[z - \lambda I] = 0$$

sont z et $\overline{z}$ (au sens matriciel complexe) :

$$\det \begin{bmatrix} a-\lambda & -b \\ b & a-\lambda \end{bmatrix} = (a-\lambda)^2 + b^2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = a \pm Jb.$$

Systèmes dynamiques linéaires complexes (1)

Considérons un système (non diagonalisable sur $\mathbb{R}$)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Posons la variable complexe $z = x + Jy$. En notant $w = a + Jb$, le second membre s'écrit comme un produit dans $\mathbb{C}$

$$\dot{z} = w\, z.$$

Systèmes dynamiques linéaires complexes (2)

La solution s'obtient via l'exponentielle complexe (série)

$$\exp(wt) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{w^i t^i}{i!},$$

qui converge (convergence en norme via le module complexe).

Si $z(0) = z_0 = x_0 + Jy_0$:

$$z(t) = e^{wt}\, z_0.$$

Donc, en séparant partie réelle/imaginaire :

$$x(t) = \mathrm{Re}(e^{wt} z_0), \qquad y(t) = \mathrm{Im}(e^{wt} z_0).$$

Exemples (1) — Partie imaginaire nulle

Si $A = a\,I$ (partie imaginaire 0)

$$\exp(At) = \exp(at\,I) = e^{at}\,I,$$

et

$$x(t) = e^{at}x_0, \qquad y(t) = e^{at}y_0.$$

Exemples (2) — Matrice antisymétrique

Si

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} = b\,J,$$

alors

$$A^2 = -b^2 I, \quad A^{2k} = (-1)^k b^{2k} I, \quad A^{2k+1} = (-1)^k b^{2k+1} J.$$

Les termes de las somme exponentielle se séparent en parties paire (réelle) et impaire (imaginaire) et l'on en déduit

$$\exp(Jbt) = \cos(bt)\,I + \sin(bt)\,J.$$

Oscillateur harmonique (forme réelle)

Considérons

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Les solutions sont données

$$x(t) + Jy(t) = \exp(Jbt)\,(x_0 + Jy_0) = [\cos(bt)\, I + \sin(bt)\, J]\,(x_0 + Jy_0).$$

En séparant réel/imaginaire

$$\begin{cases} x(t) = \cos(bt)\, x_0 - \sin(bt)\, y_0, \\ y(t) = \sin(bt)\, x_0 + \cos(bt)\, y_0, \end{cases}$$

la solution de l'oscillateur harmonique (avec $\omega = -b$).

Centres et foyers — Somme des exposants

Comme I et J commutent ($IJ = JI = J$), pour $A = a\,I + b\,J$:

$$\exp(At) = \exp(at\,I)\,\exp(bt\,J) = e^{at}\,[\cos(bt)\,I + \sin(bt)\,J].$$

Ainsi, pour $dz/dt = wz$ avec $w = A \in \mathbb{C}$:

$$x(t) + Jy(t) = \exp(At)\,z_0 = e^{at}\,(\cos(bt)\,I + \sin(bt)\,J)(x_0 + Jy_0).$$

Base réelle associée, forme canonique 2×2

Soit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ avec valeurs propres complex $a \pm bJ$ et vecteurs propres $\underline{w}, \underline{z}$, avec $A\underline{w} = a + bJ$ et $A\underline{z} = a - bJ$. Posons

$$\underline{y} = \mathrm{Re}(\underline{w}) = \frac{\underline{w} + \overline{\underline{w}}}{2}, \qquad \underline{x} = \mathrm{Im}(\underline{w}) = \frac{\underline{w} - \overline{\underline{w}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Alors, en séparant partie réel/imaginaire, on obtient

$$\begin{cases} A\underline{x} = a\underline{x} + b\underline{y}, \\ A\underline{y} = -b\underline{x} + a\underline{y}. \end{cases}$$

Dans la base $\{\underline{x}, \underline{y}\}$, A est alors representee para la matrice

$$Q = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a\,I + b\,J.$$

et donc

$$\exp(At) = B^{-1}\exp(Qt)\,B,$$

avec $B^{-1} = [\underline{x}, \underline{y}]$.

Forme canonique et étude qualitative

Si une matrice 2×2 a des valeurs propres complexes conjuguées, on peut toujours la ramener (par changement de base) à une matrice de $\mathbb{C}$ correspondant à l'un des deux valeurs propres.

Et, comment nous venons de le faire, on étudie alors la forme canonique

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - by, \\ \dot{y} = bx + ay. \end{cases}$$

Classification qualitative (centres et foyers)

Le comportement dépend du signe de a :

- $a < 0$: toutes les orbites (sauf l'équilibre) vont à l'infini quand $t \to -\infty$ et convergent vers l'origine quand $t \to +\infty$; trajectoires en **spirales** de fréquence $|b|$ (foyer stable).
- $a > 0$: spirales **divergentes** (foyer instable).
- $a = 0$: **centre**; les orbites sont périodiques et bouclent (pas de limites pour $t \to \pm\infty$). Si $b > 0$, rotation antihoraire.

A. Franci - G. Drion - J. Brandoit - J. Vanderheyden

Systèmes semisimples

Système semisimple — Définition

Définition. Une matrice réelle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est **semisimple** si elle est diagonalisable sur le corps complexe, c'est-à-dire s'il existe une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ telle que

$$A\underline{v}_k = \lambda_k \underline{v}_k, \qquad \lambda_k \in \mathbb{C}.$$

Système semisimple — Remarques

Si tous les valeurs propres sont simples (multiplicité algébrique 1), alors A est semisimple (les vecteurs propres de valerurs propres distinctes sont indépendants).

Mais une matrice peut être semisimple même avec des valeurs propres multiples. Par exemple $A = I$.

Dynamiques pour matrices semisimples (1)

Nous allons maintenant montrer que si A est semisimple, alors pour le système

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x}, \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^n,$$

toutes les orbites s'écrivent comme combinaisons linéaires de fonctions

$$e^{a_k t}\cos(b_k t), \qquad e^{a_k t}\sin(b_k t),$$

où $a_k = \mathrm{Re}(\lambda_k)$ et $b_k = \mathrm{Im}(\lambda_k)$.

Dynamiques pour matrices semisimples (2)

L'équation caractéristique $\det(A - \lambda I) = 0$ est de degré n, à coefficients réels (invariants de A). Elle a n racines (comptées avec multiplicité): certaines réelles

$$c_1, \ldots, c_s \in \mathbb{R},$$

et d'autres en paires complexes conjuguées

$$a_1 \pm Jb_1,\ a_2 \pm Jb_2,\ \ldots,\ a_r \pm Jb_r, \qquad s + 2r = n.$$

Base réelle et blocs 2×2

Comme A est semisimple, on dispose de $n = s + 2r$ vecteurs propres (sur $\mathbb{C}$) indépendants.

Pour les réels:

$$A\underline{v}_k = c_k \underline{v}_k, \quad k = 1, \ldots, s.$$

Pour les complexes:

$$A\underline{w}_k = (a_k + Jb_k)\underline{w}_k, \qquad A\underline{z}_k = (a_k - Jb_k)\underline{z}_k, \qquad \underline{z}_k = \overline{\underline{w}_k}.$$

On construit une base réelle

$$\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_s, \ \mathrm{Im}(\underline{w}_1), \mathrm{Re}(\underline{w}_1), \ldots, \mathrm{Im}(\underline{w}_r), \mathrm{Re}(\underline{w}_r).$$

Forme canonique en blocs

Dans cette base, la matrice $Q = BAB^{-1}$ est **diagonale par blocs** :

$$Q = \operatorname{diag}[c_1, \ldots, c_s,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_r],$$

où chaque $\lambda_k = a_k + Jb_k$ est représenté par son bloc 2×2

$$e^{a_k t} \begin{bmatrix} \cos(b_k t) & -\sin(b_k t) \\ \sin(b_k t) & \cos(b_k t) \end{bmatrix}$$

apparaissant dans $\exp(\lambda_k t)$, tandis que

$$\exp(c_k t) = e^{c_k t}.$$

Exponentielle en blocs et solution

L'exponentielle est diagonale par blocs :

$$\exp(Qt) = \operatorname{diag}\big(e^{c_1 t}, \ldots, e^{c_s t}, \exp(\lambda_1 t), \ldots, \exp(\lambda_r t)\big),$$

avec

$$\exp(\lambda_k t) = e^{a_k t} \begin{bmatrix} \cos(b_k t) & -\sin(b_k t) \\ \sin(b_k t) & \cos(b_k t) \end{bmatrix}.$$

Ainsi,

$$\underline{x}(t) = \exp(At)\underline{x}_0 = B^{-1} \exp(Qt) B\, \underline{x}_0.$$

avec $B = [\underline{v}_1\ \ldots\ \underline{v}_s\ \ \mathrm{Im}(\underline{w}_1)\, \mathrm{Re}(\underline{w}_1)\ \ldots\ \mathrm{Im}(\underline{w}_r)\, \mathrm{Re}(\underline{w}_r)]$

C.Q.F.D.

Exercice (dimension 3)

Déterminer le flux intégral du système

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x}, \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 3 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix},$$

et déterminer quelles orbites ont $\underline{0}$ comme limite pour $t \to +\infty$ et pour $t \to -\infty$.

Matrices nilpotentes

Matrices nilpotentes — Sommaire

Si une matrice n'est ni diagonalisable ni semisimple, elle diffère d'une matrice diagonalisable (ou semisimple) par une matrice qui, élevée à une certaine puissance, donne la matrice nulle. L'exponentielle d'une matrice peut alors être exprimée à l'aide de fonctions analytiques élémentaires: exponentielles, sinus, cosinus et aussi des polynômes.

Un seul valeur propre réel — Début

Les matrices ayant des valeurs propres simples sont semisimples. À l'opposé, considérons une matrice ayant un seul valeur propre réel de multiplicité maximale égale à la dimension.

Soit A une matrice $k \times k$ avec comme unique valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$N = A - \lambda I$$

a pour unique valeur propre 0 et n'est pas inversible.

Chaîne d'images strictement décroissantes

Considérons l'application linéaire associée à N

$$\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k.$$

Comme N n'est pas un isomorphisme, son image a une dimension strictement inférieure à k :

$$\dim N(\mathbb{R}^k) < k.$$

En appliquant de nouveau N, on obtient

$$k = \dim \mathbb{R}^k > \dim N(\mathbb{R}^k) > \dim N^2(\mathbb{R}^k) > \cdots > \dim N^k(\mathbb{R}^k) = 0.$$

La suite strictement décroissante doit s'annuler en au plus k étapes.

Définition — Nilpotence

Définition. Un opérateur linéaire (ou une matrice) N est **nilpotent** s'il existe un entier $s > 0$ tel que

$$N^s = \underline{\underline{0}}.$$

Le plus petit tel s est l'**ordre du nilpotent**. On a toujours :

$$s \leq k.$$

Une matrice dont l'unique valeur propre est 0 est nilpotente, et un nilpotent n'a pour valeur propre que 0.

Décomposition $A = \lambda I + N$

Si A a un seul valeur propre λ, alors

$$A = \lambda I + N.$$

Comme λI commute avec N, on applique le théorème de la somme des exposants et on obtient

$$\exp(At) = \exp(\lambda I t + Nt) = e^{\lambda t} \exp(Nt).$$

Si $N^s = 0$, alors pour la definition d'exponentielle matriciel

$$\exp(Nt) = I + Nt + \frac{N^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{N^{s-1} t^{s-1}}{(s-1)!}.$$

Ce que nous dit que la solution générale du système $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$ est donc un produit d'une exponentielle $e^{\lambda t}$ et d'un polynôme en t.

Réduction en forme canonique

On cherche une base dont N est representee par une matrice Q aussi simple que possible.

1. Choisissons $\underline{v}_1$ tel que $N\underline{v}_1 \neq 0$, puis $\underline{v}_2 = N\underline{v}_1$.
2. Si $N\underline{v}_2 = 0$ et $k = 2$ alors
$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
3. Si $k > 2$, deux possibilités:
   - Si $N\underline{v}_2 \neq 0$, on choisit $\underline{v}_3 = N\underline{v}_2$;
   - Si $N\underline{v}_2 = 0$ on choisit un vecteur $\underline{v}_3$ indépendant de $\underline{v}_1$ et $\underline{v}_2$ tel que $N\underline{v}_3 \neq 0$.
   - On répète jusqu'à $s \leq k$.

Forme canonique des nilpotents

Par construction, une matrice nilpotente N se réduit à une matrice diagonale par blocs

$$B^{-1}NB = \mathrm{diag}[Q_1, \ldots, Q_s],$$

où chaque bloc de Jordan Q_j est de la forme

$$q_{ij} = 1 \text{ si } i = j+1, \qquad q_{ij} = 0 \text{ sinon.}$$

Exercice. Calculer $\exp(Qt)$ pour un bloc nilpotent Q.

Lien avec la forme canonique de Jordan

Si $A = \lambda I + N$, avec N nilpotent réduit en forme canonique, alors A se réduit en sa forme canonique de Jordan

$$F = \lambda I + J,$$

où chaque bloc J a la forme

$$f_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j + 1, \\ \lambda, & i = j, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le nombre de blocs de Jordan correspond à la multiplicité géométrique.

Exemple : nœud impropre (dimension 2)

En dimension $k = 2$, pour une matrice

$$A = \lambda I + N, \qquad N^2 = 0,$$

l'exponentielle vaut

$$\exp(Nt) = I + Nt,$$

donc

$$\exp(At) = e^{\lambda t}(I + Nt).$$

Le flux du système $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$

$$\underline{x}(t) = e^{\lambda t}\left(\underline{x}_0 + N\underline{x}_0\, t\right).$$

Forme canonique en dimension 2

Dans la base de Jordan A est representee par

$$Q = \lambda I + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors

$$\exp(Qt) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}.$$

et on obtient

$$\underline{x}(t) = e^{\lambda t} B^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} B \, \underline{x}_0.$$

Étude qualitative du nœud impropre

Dans la forme canonique

$$\dot{x} = \lambda x, \qquad \dot{y} = x + \lambda y.$$

la solution est donnée par

$$x(t) = e^{\lambda t} x_0, \qquad y(t) = e^{\lambda t}(y_0 + x_0 t).$$

Comportement selon λ :

- $\lambda < 0$: toutes les solutions vont à l'infinie pour $t \to -\infty$ et à l'origine pour $t \to \infty$. Elles convergent à l'origine avec tangent vertical.
- $\lambda > 0$: toutes les solutions vont à l'infinie pour $t \to \infty$ et à l'origine pour $t \to -\infty$. Elles divergent de l'origine avec tangent vertical.
- $\lambda = 0$: l'axe $\{x = 0\}$ est composée d'équilibres. Toutes les autres trajectoires avec $x_0 \neq 0$ vont a l'infinie pour $t \to \pm\infty$ et sont de droites $x = \mathrm{cste}$

Solution générale d'un système dynamique linéaire

Solution générale d'un système dynamique linéaire

Pour tout système

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x},$$

toute matrice A admet une décomposition unique

$$A = S + N, \qquad SN = NS,$$

où S est semisimple et N nilpotente.

Les solutions sont combinaisons de

- exponentielles $e^{\lambda t}$;
- termes $e^{at}\cos(bt)$, $e^{at}\sin(bt)$;
- exponentielles $e^{\lambda t}$ multipliées par polynomes;
- combinaisons trigono-polynomiales $e^{at}\cos(bt)P(t)$, etc.

Exponentielle de $S + N$

Comme S et N commutent

$$\exp(St + Nt) = \exp(St)\exp(Nt).$$

N étant nilpotente d'ordre k:

$$\exp(Nt) = \sum_{j=0}^{k} \frac{N^j t^j}{j!}.$$

Et $\exp(St)$ s'exprime à l'aide des formes canoniques semisimples (exponentielles + sinus + cosinus).

Si A n'a que des valeurs propres réelles, il existe B tel que :

$$Q = BAB^{-1} = \mathrm{diag}\,[\lambda_1 I + N_1,\, \ldots,\, \lambda_s I + N_s].$$

Chaque N_k est nilpotent d'ordre $\leq m_k - 1$ (multiplicités algébriques). L'exponentielle donne alors

$$e^{\lambda_k t} \text{ multipliée par un polynôme de degré } \leq m_k - 1.$$

Forme canonique de Jordan (blocs réels)

L'exponentiel de chaque bloc réel Q_k de taille p est donné par

$$\exp(Q_k t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ t & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} & \cdots & t & 1 \end{bmatrix}.$$

Forme canonique de Jordan réelle — valeurs propres complexes

Si A a des valeurs propres complexes $z, \overline{z}$, on obtient des blocs réels de la forme

$$C = \mathrm{diag}[z, z, \dots, z] + N,$$

avec z en forme matricielle réelle 2×2 et N nilpotente (coefficients au-dessus de la diagonale).

Exercice (dimension 4)

Déterminer le flux intégral de :

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 6 & 6 & 2 & -6 \\ -3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x},$$

et étudier les limites des trajectoires lorsque $t \to \infty$.
Indication : La matrice a un seul valuer propre.