Introduction aux signaux et systèmes
Cours 4

Systèmes linéaires ouverts de dimension n

Alessio Franci, Guillaume Drion, Julien Brandoit, Julien Vanderheyden

Université de Liège

February 23, 2026

Résumé des systèmes fermés de dimension n

Linéarisation des systèmes fermés

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ $\quad x_i$

- Étant donné un système dynamique fermé non linéaire $\dot{\underline{x}} = F(\underline{x})$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, sa linéarisation au voisinage d'un équilibre $\underline{x}^*$ est

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x}\,, \qquad A = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\underline{x}^*)\right)$$

  c'est-à-dire que la matrice d'état est le Jacobien du système évalué en cet équilibre.

- Les linéarisations du même système en deux équilibres différents sont généralement différentes. Exemple :

$$\left[\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \sin(x_1) - x_2 \end{pmatrix} \leftarrow \right]$$

  aux équilibres $\binom{0}{0}$ et $\binom{\pi}{0}$.

Solution des systèmes linéaires fermés : théorie

$\exists s \leq n : N^s = \underline{0}$ $\quad SN = NS \Rightarrow e^{(St+Nt)} = e^{St} \cdot e^{Nt}$

- On peut toujours écrire $A = S + N$, où S est semi-simple (diagonalisable sur $\mathbb{C}$) et N est nilpotente d'ordre s.
- Alors la solution $\underline{x}(t)$ de $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$ est

$$\boxed{\underline{x}(t) = e^{St} e^{Nt} \underline{x}(0)}$$

  où :

  - les éléments de e^{St} s'expriment en termes d'exponentielles, sinus et cosinus ;
  - les éléments de e^{Nt} sont des polynômes de degré maximal s.

Solution des systèmes linéaires fermés : pratique

Après un changement de coordonnées $\underline{y} = B\underline{x}$, on transforme A en sa forme de Jordan :

$$Q = BAB^{-1} = \mathrm{diag}(Q_1, \ldots, Q_k)$$

et

$$e^{Qt} = \mathrm{diag}\left(e^{Q_1 t}, \ldots, e^{Q_k t}\right),$$

où :

valeur propre

- $e^{Q_i t} = e^{\lambda_i t}$ si λ_i est un ~~autovaleur~~ réel ;

v.p.

- $e^{Q_i t} = e^{a_i t} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(b_i t) & -\sin(b_i t) \\ \sin(b_i t) & \cos(b_i t) \end{pmatrix}}$ si $a_i + jb_i$ est un ~~autovaleur~~ complexe ;
- ou bien... (voir la prochaine diapositive).

- $$e^{Q_i t} = e^{\lambda_i t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ t & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} & \dots & t & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Bloc de Jordan – autovaleur réelle } \lambda_i}$$

$Q_i^s = 0$

$P, P_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$P \begin{pmatrix} P_{11} & \dots & P_{1q} \\ P_{p1} & \dots & P_{pq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PP_{11} & \dots & P_{1q} \\ \vdots & & \\ P_{p1} & \dots & P_{pq} \end{pmatrix}$$

- $$\underbrace{e^{Q_i t} = \begin{pmatrix} e^{C_i t} & & & \\ te^{C_i t} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}e^{C_i t} & \dots & te^{C_i t} & e^{C_i t} \end{pmatrix} = (*), \; e^{C_i t} = \underbrace{e^{a_i t} \begin{pmatrix} \cos(b_i t) & -\sin(b_i t) \\ \sin(b_i t) & \cos(b_i t) \end{pmatrix}}}_{\text{Bloc de Jordan – autovaleur complexe } a_i + jb_i}$$

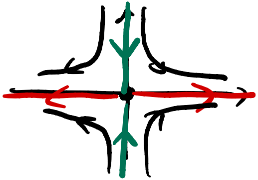
$$(*) = e^{c_i t} \begin{pmatrix} I & & & 0 \\ t & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} & \cdots & t & I \end{pmatrix}$$

Implication pour la stabilité

Stabilité d'un équilibre à partir de la linéarisation

- Si toutes les valeur propres ont une partie réelle négative $\Rightarrow$ l'équilibre est asymptotiquement stable.
  Exemple :
  $$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x$$

- Si certaines valeur propres ont une partie réelle positive $\Rightarrow$ l'équilibre est instable.
  Exemple :
  $$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x$$



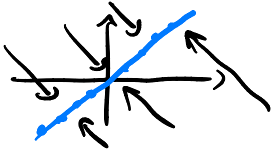
In Jordan base

Stabilité d'un équilibre à partir de la linéarisation

Cas semi-simple

- Si toutes les valeur propres ont une partie réelle non positive et les valeur propres de partie réelle nulle ne sont pas associées à un bloc de Jordan $\Rightarrow$ équilibre stable mais non asymptotiquement stable.
  Exemple :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \underline{x}$$



Cas nilpotent

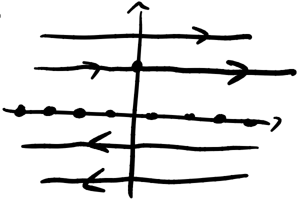
- Si les valeur propres de partie réelle nulle sont associées à un bloc de Jordan $\Rightarrow$ équilibre instable, avec croissance polynomiale possible dans les modes neutres.
  Exemple :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_1(0) = 0$

$x_2(0) = 1$



n-dimensional open linear systems

Considérons maintenant des systèmes non linéaires avec entrées et sorties :

$u(t) \equiv u^* \in \mathbb{R}^m$

$m = l = 1$

$\longrightarrow$ SISO

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= f(\underline{x}, \underline{u}), \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^n,\ \underline{u} \in \mathbb{R}^m, \\ \underline{y} &= g(\underline{x}, \underline{u}), \qquad \underline{y} \in \mathbb{R}^l. \end{aligned} \qquad (\dagger)$$

- Pour une entrée constante $\boxed{\underline{u} = \underline{u}^*}$ un équilibre $\underline{x}^*$ du système $(\dagger)$ vérifie

$$f(\underline{x}^*, \underline{u}^*) = \underline{0}.$$

$\tilde{f}(x) = f(x, u^*)$

- La linéarisation du système $(\dagger)$ en $(\underline{x}^*, \underline{u}^*)$ est :

Par Taylor au ordre 1

entrée

$$\left[\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= A\underline{x} + B\underline{u}, \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^n,\ \underline{u} \in \mathbb{R}^m, \\ \underline{y} &= C\underline{x} + D\underline{u}, \qquad \underline{y} \in \mathbb{R}^l, \end{aligned}\right]$$

sortie

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$B \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$C \in \mathbb{R}^{l \times n}$

$D \in \mathbb{R}^{l \times m}$

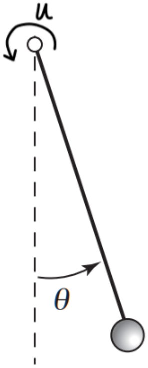
où

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right), \quad B = \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right), \quad C = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right), \quad D = \left(\frac{\partial g_i}{\partial u_j}\right)$$

sont évaluées en $(\underline{x}^*, \underline{u}^*)$.

Un exemple

actuateur



- Considérons l'équation du pendule soumis à un couple appliqué au pivot :

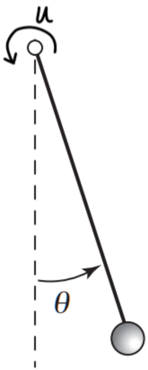
$$\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin(x_1) - x_2 + u \end{pmatrix}, \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

- On suppose que la sortie mesurée est $\sin(\theta)$, par exemple à l'aide d'un capteur Hall. senseur

- Le système entrée–sortie s'écrit donc :

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\dot{x}} &= \begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin(x_1) - x_2 + u \end{pmatrix}, \\ y &= \sin(x_1). \end{aligned}}$$

Un exemple



- Pour $u = u^* = 0$, le système possède deux équilibres :

$$\underline{x}_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{x}_2^* = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Linéarisation en $\underline{x}_1^*$:

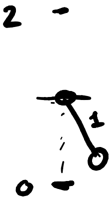
$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u,$$
$$y = x_1.$$

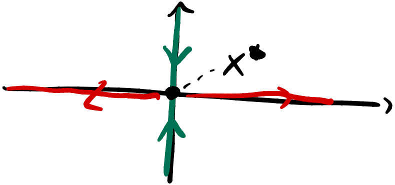
stable

- Linéarisation en $\underline{x}_2^*$:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u,$$
$$y = -x_1.$$

instable (selle)





pour le cas

$$\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \sin(x_1) \end{pmatrix}$$

$x_1(0) = \bar{\theta} = \pi/2$; $x_2(0) =$

Systèmes ouverts linéaires comme opérateurs entrée–sortie

Pour choisir $x_2(0)$: pour $t \to +\infty$ $\begin{cases} x_1(t) \to \pi \\ x_2(t) \to 0 \end{cases}$

Nous imposons

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= -\frac{1}{2}\cos(x_1(0)) + \frac{1}{2} x_2^2(0) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \cos(\pi) \end{aligned}\right\}$$

Solution d'un système ouvert linéaire

Considérons le système linéaire :

$$\underline{\dot{x}} = A\underline{x} + B\underline{u}. \qquad \underline{u}(t)$$

Theorem

La solution est donnée par :

$$\underline{x}(t) = e^{At}\,\underline{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\,\underline{u}(\tau)\,d\tau.$$

Esquisse de preuve. En dérivant l'expression et en utilisant $\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At}$:

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \underbrace{Ae^{At}\underline{x}(0) + \int_0^t Ae^{A(t-\tau)} B\underline{u}(\tau)d\tau}_{= A\left[e^{At}\underline{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\underline{u}(\tau)\, d\tau\right]} + B\underline{u}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t). \quad \square$$

$$e^{At}\underline{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\underline{u}(\tau)\, d\tau = \underline{x}(t)$$

Réponse entrée–sortie d'un système ouvert

- Considérons maintenant :

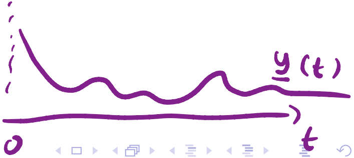
$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= A\underline{x} + B\underline{u}, \\ \underline{y} &= C\underline{x} + D\underline{u}. \end{aligned}}$$

- La sortie vaut :

$$\underline{y}(t) = Ce^{At}\underline{x}(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}B\,\underline{u}(\tau)\,d\tau + D\,\underline{u}(t).$$

- Pour conditions initiales fixées, le système définit un opérateur :

$$\boxed{\underline{u}(\cdot) \mapsto \underline{y}(\cdot).}$$



Propriétés des systèmes ouverts linéaires

- **Linéarité.** Si $\underline{x}_1(t), \underline{y}_1(t)$ sont la trajectoire d'état et la sortie pour

(1) $$\underline{x}(0) = \underline{x}_1, \quad \underline{u}(t) = \underline{u}_1(t),$$

et $\underline{x}_2(t), \underline{y}_2(t)$ celles correspondant à

(2) $$\underline{x}(0) = \underline{x}_2, \quad \underline{u}(t) = \underline{u}_2(t),$$

alors, par linéarité des opérations matricielles et de l'intégrale :

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_1(t) + \underline{x}_2(t), \qquad \underline{y}(t) = \underline{y}_1(t) + \underline{y}_2(t)$$

est la réponse associée à

$$\underline{x}(0) = \underline{x}_1 + \underline{x}_2, \qquad \underline{u}(t) = \underline{u}_1(t) + \underline{u}_2(t).$$

• Vu que $\underline{x}(t) = \underbrace{e^{At}\underline{x}(0)}_{\text{Linéaire dans les conditions initielle}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} u(\tau)\, d\tau}_{\text{Linéaire dans l'entrée}}$

$$\Rightarrow e^{At}\left(x_1(0) + x_2(0)\right)$$

$$= e^{At} x_1(0) + e^{At} x_2(0)$$

$$\Rightarrow \int_0^t e^{A(t-\tau)}\left(u_1(\tau) + u_2(\tau)\right) d\tau$$

$$= \int_0^t e^{A(t-\tau)} u_1(\tau)\, d\tau + \int_0^t e^{A(t-\tau)} u_2(\tau)\, d\tau$$

$= x_1(t)$

$= x_2(t)$

Linéarité et invariance temporelle (LTI)

Si A, B, C, D sont constantes

- **Invariance temporelle.** Si $\underline{x}(t), \underline{y}(t)$ sont les réponses pour $\underline{x}(0)$ et l'entrée $\underline{u}(t)$, alors $\underbrace{\tilde{\underline{x}}(t+T), \underline{y}(t+T)}_{\text{Solution pour l'état et pour la sortie}}$ sont les réponses pour :

$$\tilde{\underline{x}}(0) = \underline{x}(T), \qquad \tilde{\underline{u}}(t) = \underline{u}(t+T).$$

avec $\tilde{\underline{x}}(0) = \underline{x}(T)$, et entrée $\tilde{\underline{u}}(t)$.

$\Longleftrightarrow$ Nous avons retrassé la sortie de T unitées temporelles

- Un système satisfaisant ces deux propriétés est appelé **système linéaire invariant dans le temps (LTI)**.

Invariance par changement de coordonnées

$\underline{x} = T^{-1}\underline{z}$

- Soit un changement de coordonnées $\boxed{\underline{z} = T\underline{x},}$ avec T inversible. Dans le nouveau système de coordonnées :

$$\left.\begin{aligned}\dot{\underline{z}} &= TAT^{-1}\,\underline{z} + TB\,\underline{u},\\ \underline{y} &= CT^{-1}\underline{z} + D\underline{u}.\end{aligned}\right\}$$

- L'opérateur entrée–sortie correspondant est :

$$\underline{y}(t) = \underbrace{CT^{-1}e^{TAT^{-1}t}\,\underline{z}(0)} + \int_0^t CT^{-1}e^{TAT^{-1}(t-\tau)}TB\,\underline{u}(\tau)\,d\tau + D\underline{u}(t).$$

$e^{TAT^{-1}} = T e^{A} T^{-1}$

$T^{-1}\underline{z}(0) = \underline{x}(0)$

Invariance par changement de coordonnées

- Comme $e^{TAT^{-1}t} = Te^{At}T^{-1}$ et $T^{-1}\underline{z}(0) = \underline{x}(0)$, on obtient

$$\boxed{\underline{y}(t) = Ce^{At}\underline{x}(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}B\,\underline{u}(\tau)\,d\tau + D\underline{u}(t).}$$

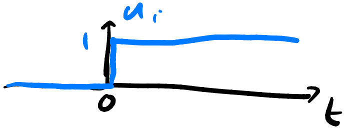
$\Longrightarrow$ L'opérateur entrée-sortie ne change pas

- Donc : **le comportement entrée–sortie est invariant par changement de coordonnées internes**.

A. Franci - G. Drion - J. Brandoit - J. Vanderheyden

Réponse en régime permanent

Soit $\underline{x}(0) = 0$, et une entrée **échelon unitaire** :



$$\underline{u}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

$$\underline{u}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

La sortie vaut alors :

$$\underline{y}(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} B\, \underline{u}(\tau)\, d\tau + D\underline{u}(t) = C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\, d\tau + D$$

$$\sigma = t - \tau$$

$$= C \int_0^t e^{A\sigma}\, B\, d\sigma + D = C\left(A^{-1} e^{A\sigma} B\right)\Big|_{\sigma=0}^{\sigma=t} + D = CA^{-1}e^{At}B - CA^{-1}B + D.$$

On peut réécrire :

$$\boxed{y(t) = \underbrace{CA^{-1}e^{At}B}_{\text{transitoire}} + \underbrace{D - CA^{-1}B}_{\text{\sout{régime permanent}}\ \text{réponse stationnaire}}, \qquad t > 0.}$$

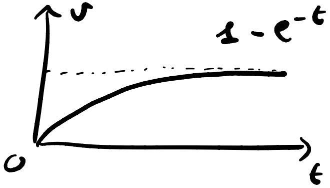
si asy. stable $t \to \infty$

$G <$

Ex

$\dot{v} = a$

$$a(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \longrightarrow$$



SISO systems, their impulse response, and convolution operators

Systèmes à une entrée et une sortie (SISO)

Dans la suite du cours, nous nous concentrerons sur les systèmes LTI :

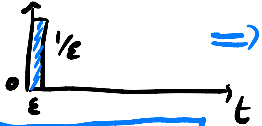
$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= A\underline{x} + B\underline{u}, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n,\ \underline{u} \in \mathbb{R}^m, \\ \underline{y} &= C\underline{x} + D\underline{u}, \quad \underline{y} \in \mathbb{R}^l, \end{aligned}$$

avec un seul signal d'entrée et un seul signal de sortie, c'est-à-dire :

$$\boxed{m = l = 1,} \qquad u(t) \in \mathbb{R}, \quad y(t) \in \mathbb{R}.$$

La fonction impulsionnelle

- On définit la fonction impulsionnelle approchée :



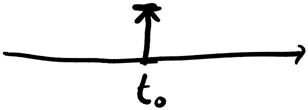
$$\Longrightarrow \int_0^{+\infty} p_\varepsilon(\tau)\, d\tau = 1$$

$$p_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \dfrac{1}{\varepsilon}, & 0 \le t < \varepsilon, \\ 0, & t \ge \varepsilon. \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\lim_{\varepsilon \to 0} p_\varepsilon(t) = \delta(t).}$$

- Comme dans la définition de l'intégrale de Riemann, si $0 < \varepsilon \ll 1$ et $T = N\varepsilon$, alors pour $0 \le t \le T$:

$$u(t) \approx \sum_{k=0}^{N} p_\varepsilon(t - k\varepsilon)\, u(k\varepsilon)\, \varepsilon.$$

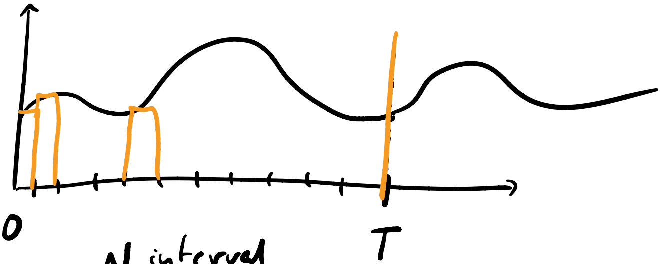
$\delta(t - t_0)$



- Lorsque $\varepsilon \to 0$ et $T \to \infty$, on obtient :

δ : delta di Dirac

$$\boxed{u(t) = \int_0^{\infty} \delta(t - \tau)\, u(\tau)\, d\tau.}$$



N interval
de longueur ε

Somme de Riemann *

Réponse impulsionnelle (1)

- Par linéarité :

$$y(t) = Ce^{At}\underline{x}(0) + \sum_{k=0}^{N} u(k\varepsilon) \int_0^t \underbrace{Ce^{A(t-\tau)} B\, p_\varepsilon(\tau - k\varepsilon)}\, \varepsilon\, d\tau + Du(t).$$

$u(\tau)$

- On introduit la réponse au *pulse* :

$$\boxed{h_\varepsilon(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} B\, p_\varepsilon(\tau)\, \varepsilon\, d\tau,}$$

c'est la sortie du système pour $\underline{x}(0) = 0$ et une impulsion courte $u(t) = p_\varepsilon(t)$.

- Lorsque $\varepsilon \to 0$, la réponse impulsionnelle devient :

$$\boxed{h(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon(t)} = \underbrace{\int_0^t Ce^{A(t-\tau)} B\, \delta(\tau)\, d\tau} = Ce^{At} B.$$

Réponse impulsionnelle (2)

- Par invariance temporelle :

$$\int_0^t Ce^{A(t-\tau)} B\, p_\varepsilon(\tau - k\varepsilon)\, \varepsilon\, d\tau = h_\varepsilon(t - k\varepsilon).$$

- On peut donc réécrire :

$$y(t) = Ce^{At}\underline{x}(0) + \sum_{k=0}^{N} h_\varepsilon(t - k\varepsilon)\, u(k\varepsilon) + Du(t).$$

- Dans la limite $\varepsilon \to 0$, $T = N\varepsilon \to \infty$, on obtient :

$$\boxed{y(t) = \underbrace{Ce^{At}\underline{x}(0)}_{\text{transitoire}} + \underbrace{\int_0^\infty h(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau + Du(t)}_{\text{régime permanent (si } u \text{ est stationnaire)}}.}$$

u

$$u = \begin{cases} \sin(\omega t) \\ c \end{cases}$$

Réponse impulsionnelle et opérateurs de convolution

- La réponse impulsionnelle $h(t)$, combinée à D, caractérise entièrement le comportement entrée–sortie du système LTI.
- La sortie s'écrit :

$$y(t) = (h \star u)(t) + Du(t),$$

où l'opération de convolution causale est définie par

$$\boxed{(f \star g)(t) = \int_0^\infty f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau.}$$

- La convolution $\star$ est :

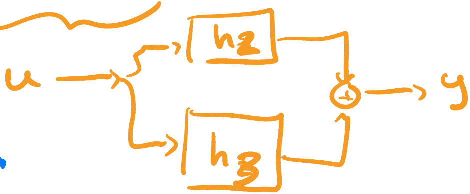
$$f \star g = g \star f \quad \text{(commutative)}, \qquad f \star (g + h) = f \star g + f \star h \quad \text{(distributive)},$$

$$f \star (g \star h) = (f \star g) \star h \quad \text{(associative)},$$

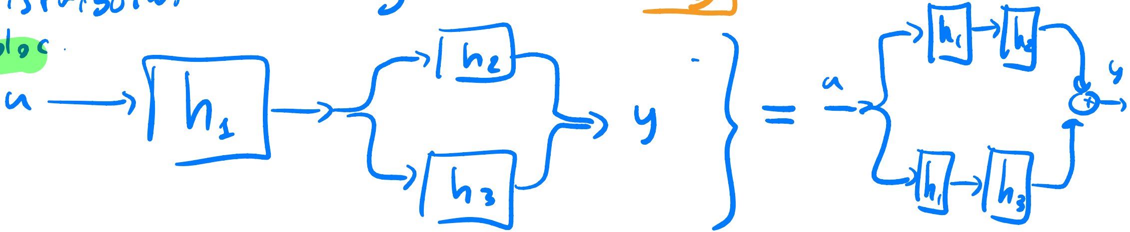
ce qui a des implications majeures en analyse de systèmes.

$f = h_1 \quad , \quad g = h_2 \quad , \quad h = h_3$

$$\overbrace{h_1 * (\underbrace{h_2 + h_3})} = h_1 * h_2 + h_1 * h_2$$



Distributivité d'un diagramme à bloc.



- Dans la définition :

$$h(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} B\, \delta(\tau)\, d\tau = Ce^{At} B,$$

on suppose que le système est causal, c'est-à-dire :

$$\boxed{h(t) \equiv 0 \quad \text{pour } t < 0.}$$

- Sous cette hypothèse :

$$\boxed{y(t) = \int_0^t h(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau + Du(t) = (h \star u)(t) + Du(t).}$$

- Un système causal ne peut pas dépendre de valeurs futures de l'entrée.