LECTURE #5 : INTRODUCTION AU DOMAINE FRÉQUENTIEL
SÉRIES DE FOURIER.

RAPPEL :

$$\mu(t) \longrightarrow \boxed{\text{SYSTÈME}} \longrightarrow y(t)$$

SIGNAL [ENTRÉE]

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,\mu) \\ y = x \end{cases}$$

SIGNAL [SORTIE].

NON-LINÉAIRE

$$\underline{\dot{x}} = f(\underline{x}, \mu)$$

TOUS LES SYSTÈMES →

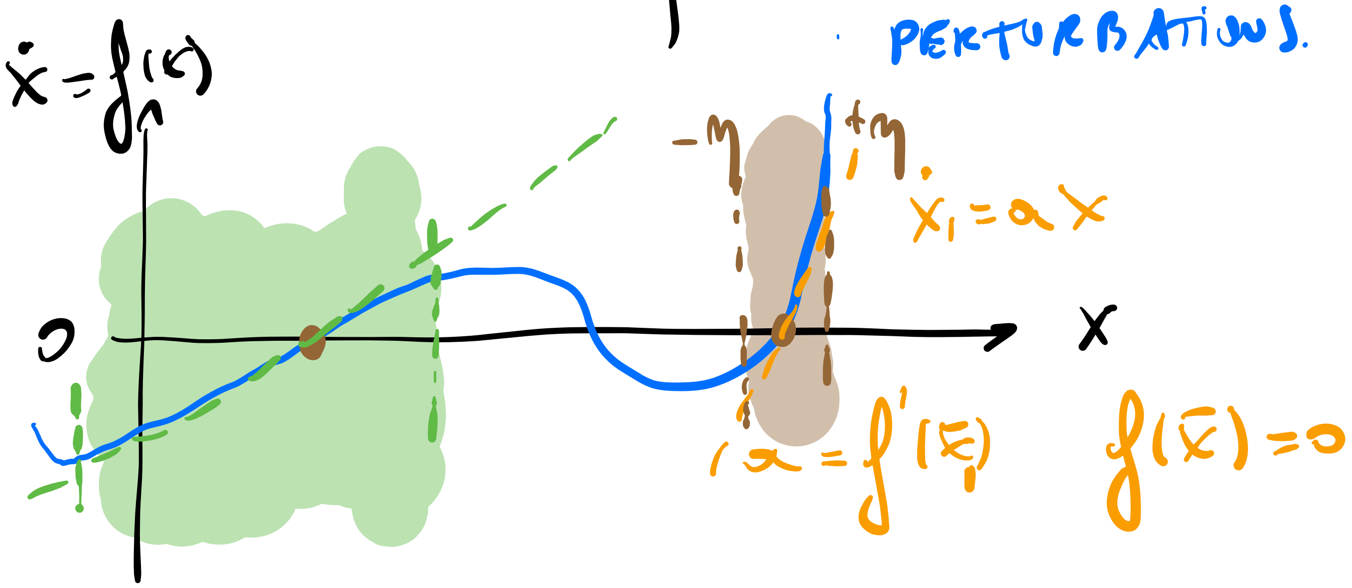
LINÉAIRE

$$\underline{\dot{x}} = A\underline{x} + B\mu$$

APPROXIMATION

↳ AUTOUR D'UN POINT DE FONCTIONNEMENT

↳ POUR DES PETITES PERTURBATIONS.



POURQUOI LINÉARISER ?

① ESPACE D'ÉTAT → SOLUTION ANALYTIQUE

[ODE] → REPRÉSENTATION MATRICIELLE.

↳ ALGÈBRE MATRICIEL

② REPRÉSENTATION ENTRÉE - SORTIE

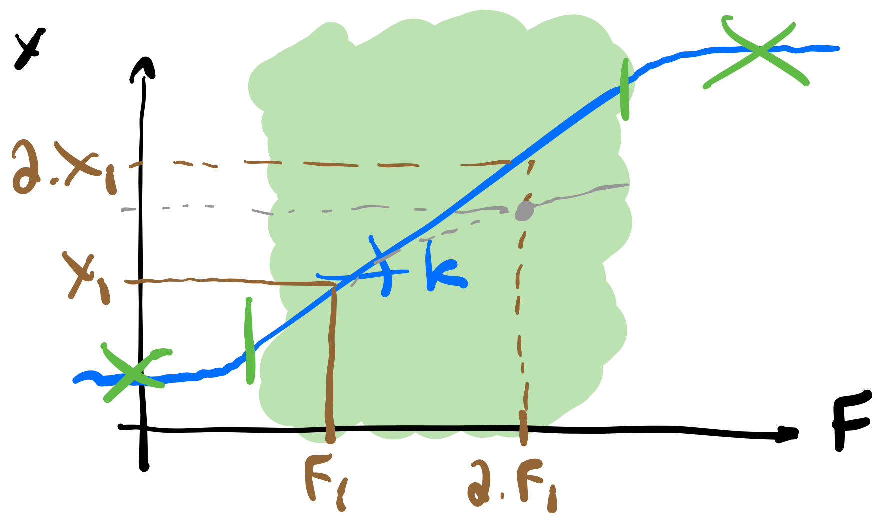
$$u(t) \longrightarrow \boxed{S(\cdot)} \longrightarrow y(t) = S(u(t))$$

OUI si $u^*(t) = \sum_i \alpha_i u_i(t) \longrightarrow y^*(t) = \sum_i \alpha_i y_i(t)$

↳ HOMOGÉNÉITÉ + ADDITIVITÉ !

→ SYSTÈME LINÉAIRE

Ex : RESSORT : $F = kx$, x : POSITION

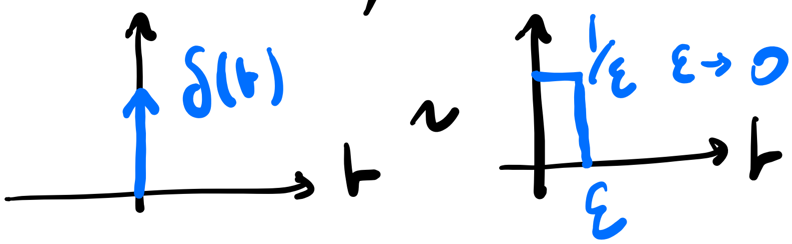


① LTI

$$u_i(t) \rightarrow \boxed{S(\cdot)} \rightarrow y_i(t)$$

↳ $u^*(t) = \sum_i \alpha_i u_i(t) \rightarrow y^*(t) = \sum_i \alpha_i y_i(t)$

↳ CHOIX #1 : $u(t) = \delta(t)$ $\quad y(t) = h(t)$



$$\rightarrow u^*(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y^*(t) = u^*(t) * h(t)$$

CONVOLUTION

INTÉRÊT :
- PAS DE RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS COMPLÈTES
- PEUT ÊTRE OBTENUE EXPÉRIMENTALEMENT
- PARFAIT POUR { ÉMULATION / ANALYSE.

MAIS PAS POUR
- LE DESIGN
- LE TRAITEMENT DE SIGNAL

EXTRAIRE LE CONTENU FRÉQUENTIEL D'UN SIGNAL MATHÉMATIQUEMENT.

EX SIMPLE : SIGNAL SONORE → NOTE.

→ LA NOTE EST DÉFINIE PAR <u>SA FRÉQUENCE!</u>

DEF. SIGNAL PÉRIODIQUE AVEC PÉRIODE T

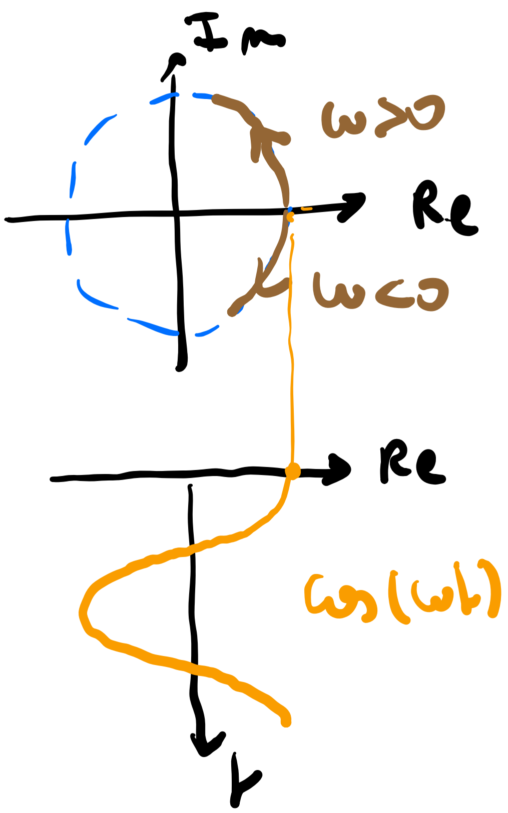
$$x(t) = x(t+T) \quad \forall t, \text{ POUR CERTAINS } T.$$

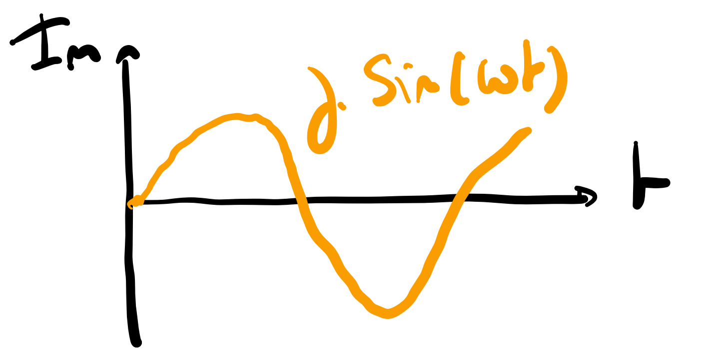
T : PÉRIODE $[s]$

$f = \frac{1}{T}$: FRÉQUENCE $[Hz]$

$\omega = 2\pi \cdot f$: FRÉQUENCE ANGULAIRE $[rad/s]$

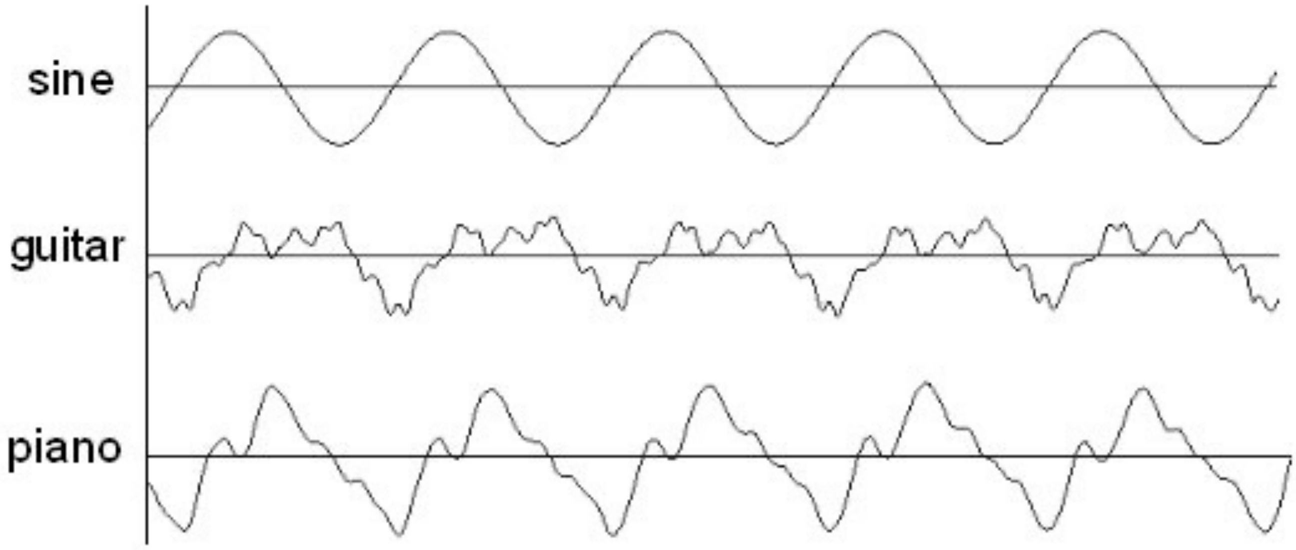
↳ SIGNAL PÉRIODIQUE DE BASE : $x(t) = e^{j\omega t}$

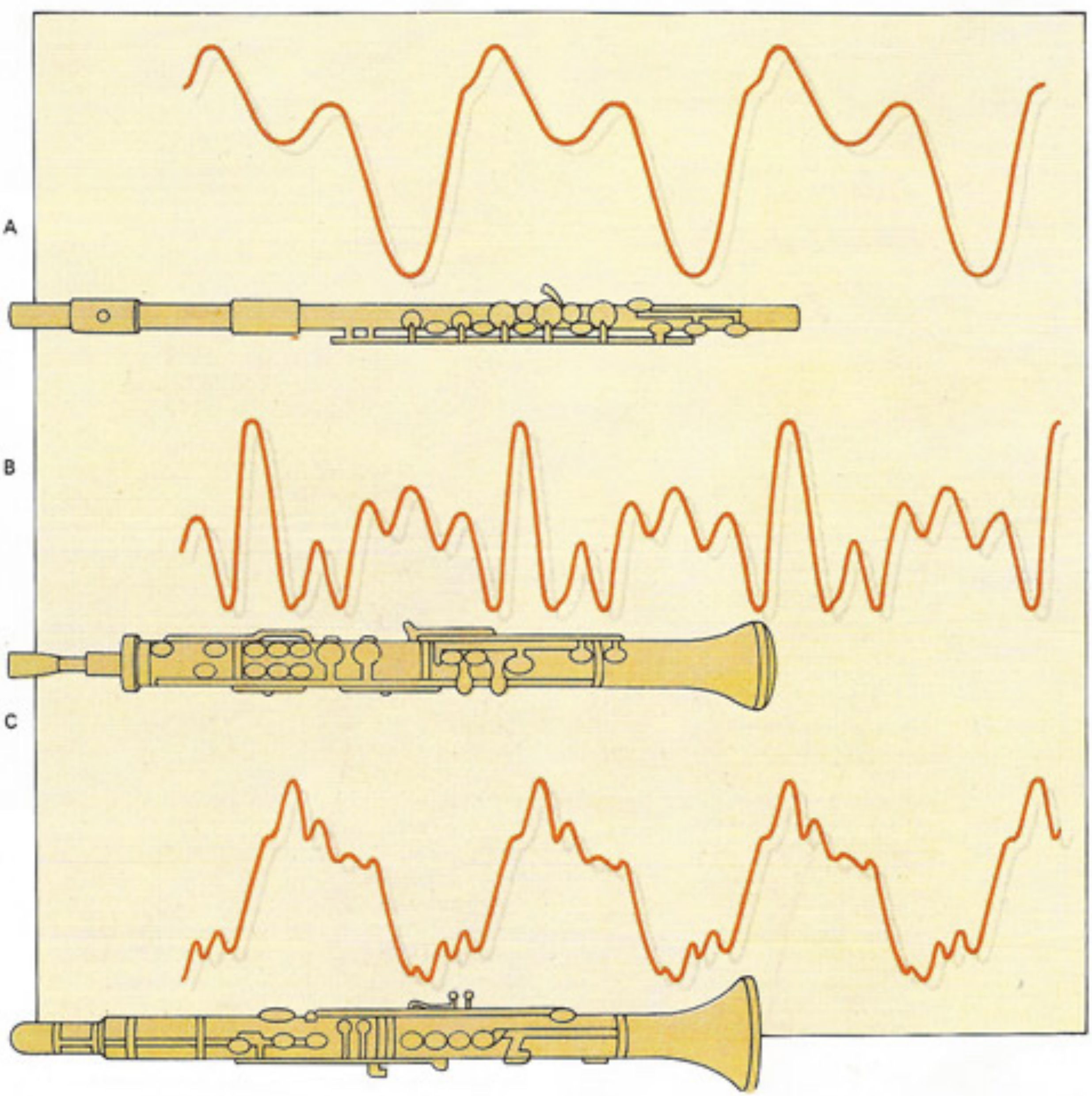




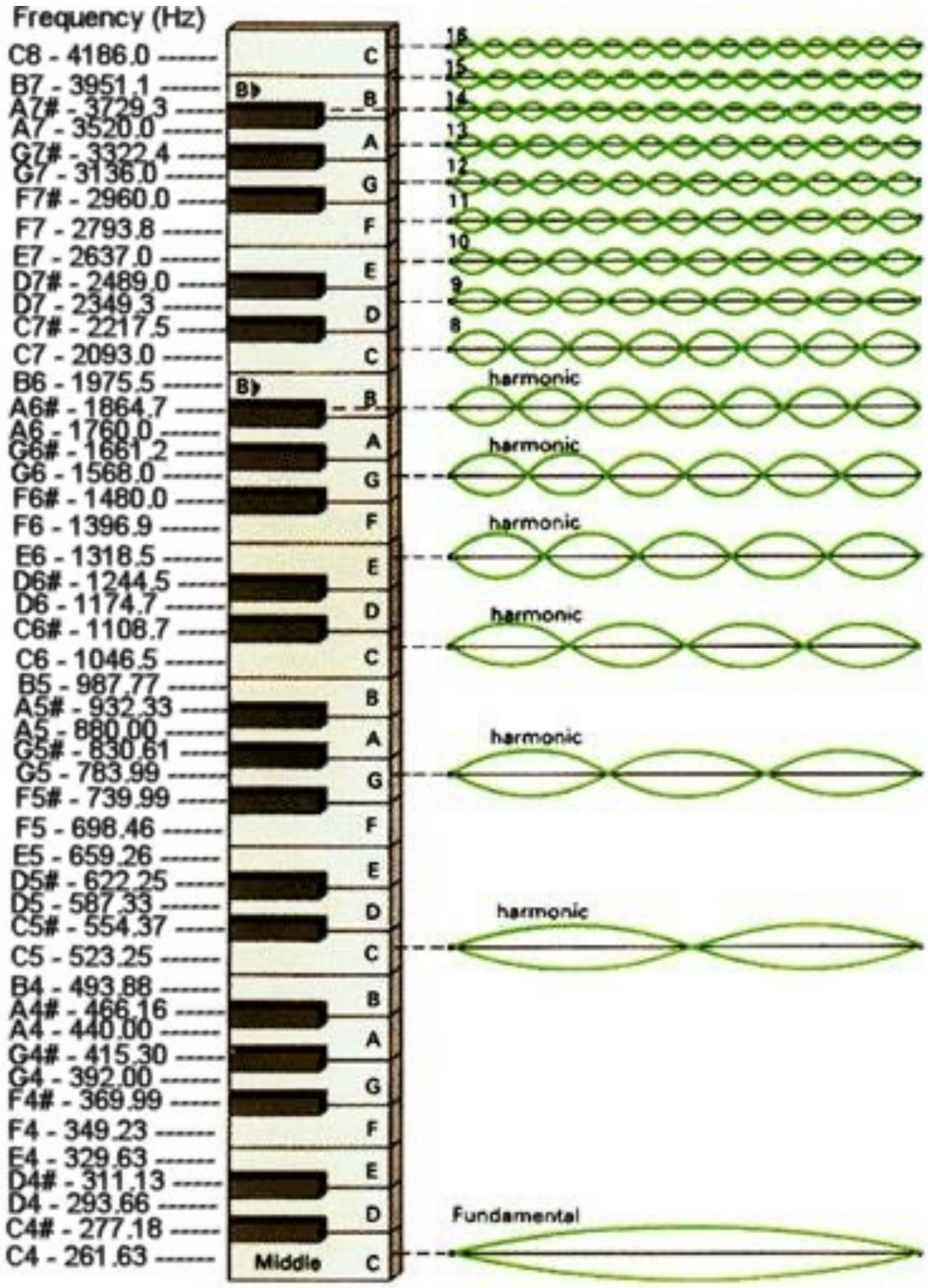
$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$$

ω_0 = NOTE SPÉCIFIQUE!


sine
guitar
piano


A
B
C

HARMONIQUES!



↳ MÊME NOTE ⟶ MÊME FRÉQUENCE !

SON ≠ ⟶ SIGNAL ≠

↳ ≠ COMBINAISONS D'HARMONIQUES.

(A) ON DÉFINIT LA FRÉQUENCE FONDAMENTALE

$$\mu(t) = e^{j\omega_0 t} = e^{j\frac{2\pi}{T_0}t}$$

NOTE

PÉRIODIQUE DE PÉRIODE T_0

(B) ON DÉFINIT L'ENSEMBLE DES HARMONIQUES

$$\phi_k(t) = e^{jk.\omega_0 t} = e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}$$

$k = 0 ; \pm 1, \pm 2, \dots$

TOUTES PÉRIODIQUES DE PÉRIODE T_0 !

(C) TIMBRE ?

"POIDS" DE LA $k^{\text{ème}}$ HARMONIQUE

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

SIGNAL PÉRIODIQUE DE PÉRIODE T_0.

Ex: $x(t) = \cos(\omega_0 t) = \dfrac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

$$= \dots + \cancel{a_{-2} \cdot e^{-2j\omega_0 t}} + \underline{a_{-1}} \cdot e^{-j\omega_0 t}$$

$$+ a_0 \cdot \underbrace{e^0}_{1} + \underline{a_1} \cdot e^{j\omega_0 t} + a_2 \cdot \underbrace{e^{2j\omega_0 t} +}\dots$$

$a_0 = 2$

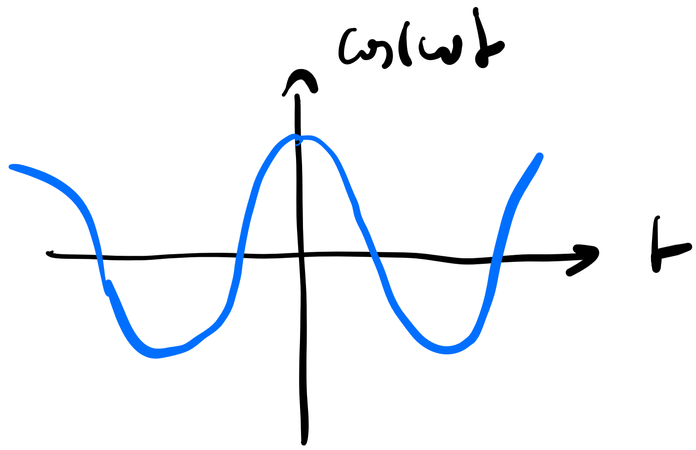
↳ $a_{-2} = 0$ ↳ $a_0 = 0$ ↳ $a_2 = 0$

↳ $a_{-1} = \frac{1}{2}$ ↳ $a_1 = \frac{1}{2}$ ...

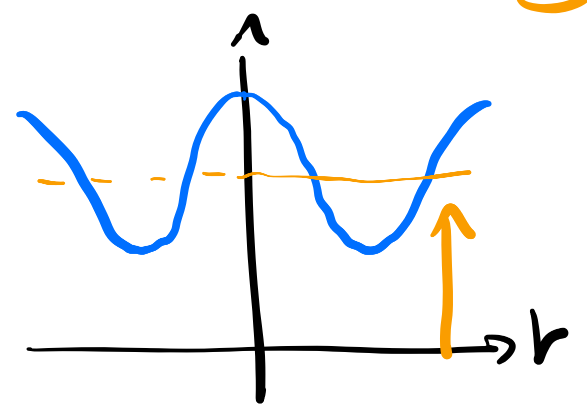
$e^{j0\omega_0 t}$

↓

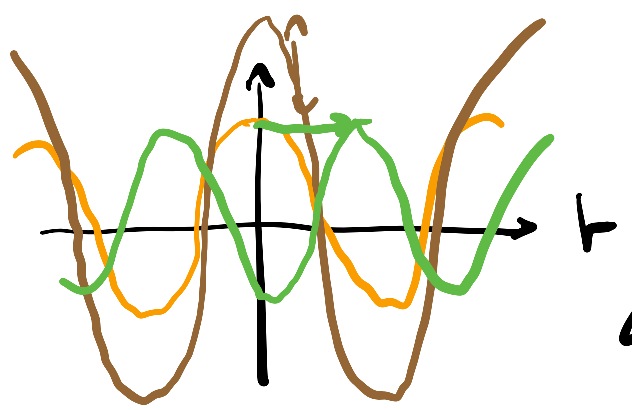
$\cos(\omega t) + 2 \cdot 1$



→

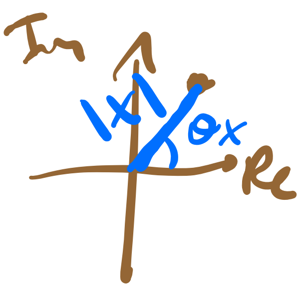


→ a_k : CONTRIBUTION DE L'HARMONIQUE k.



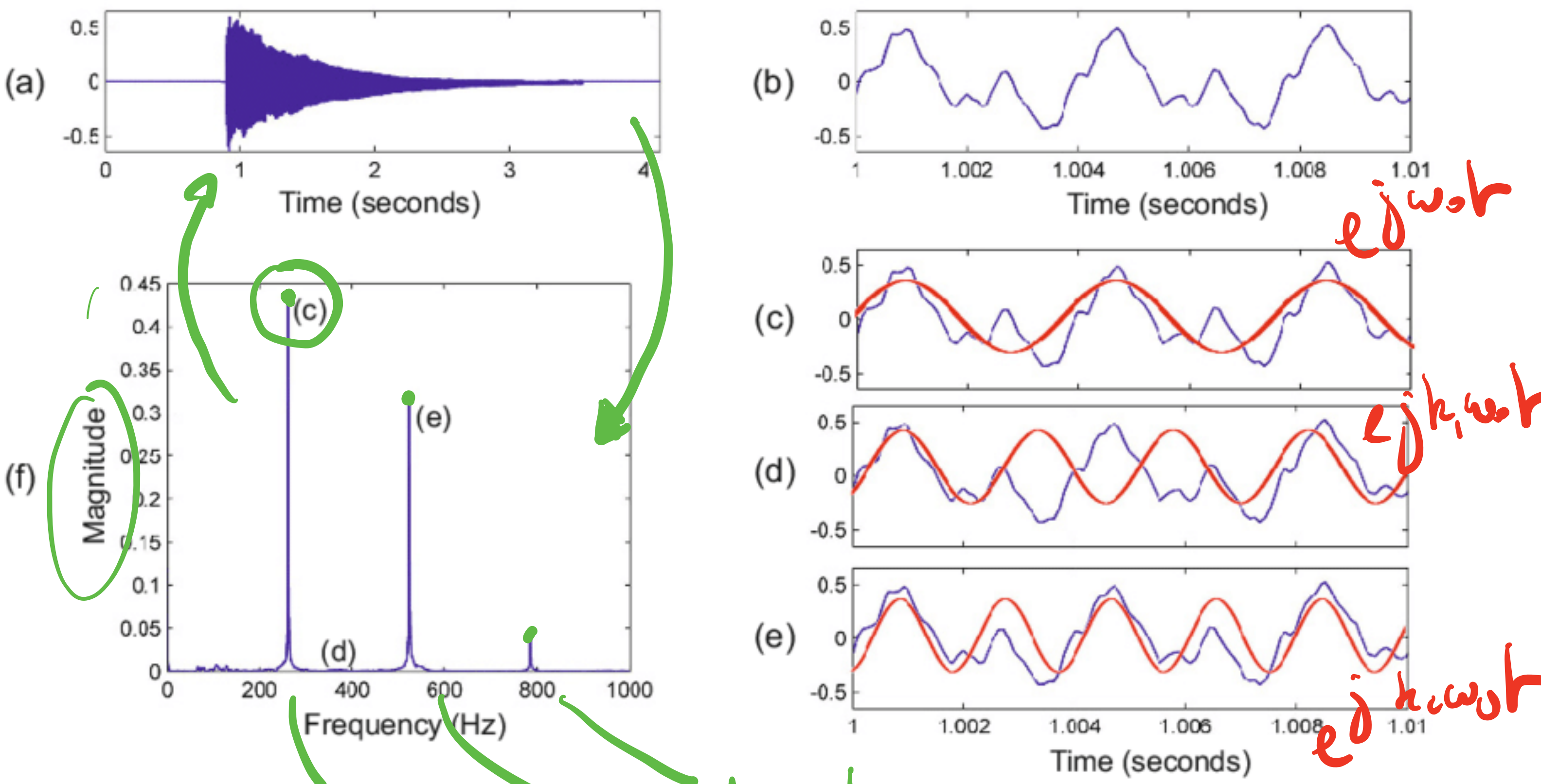
→ AMPLITUDE

→ PHASE



↳ NOMBRE COMPLEXE

$$a_k = |a_k| \cdot e^{j\theta_{a_k}}$$



$|a_k|$ $|a_1|$ $|a_2|$ $|a_3|$

↳ COMMENT CALCULER LES $\underline{a}_k$ POUR UN SIGNAL PÉRIODIQUE ARBITRAIRE?

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

$\cdot \, e^{-jn\omega_0 t}$ $\qquad\qquad$ $\cdot \, e^{-jn\omega_0 t}$

$+ \int$ PÉRIODE $\qquad\qquad$ $+ \int$ PÉRIODE

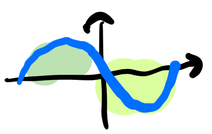
$$\hookrightarrow \int_0^{T_0} x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \, dt$$

$$= \int_0^{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{-jn\omega_0 t} \, dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \underbrace{\int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} \, dt}_{①}$$

① $\int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} \, dt$ $\qquad$ k, n ENTIERS

$$= \int_0^{T_0} \cos((k-n)\omega t) \, dt + j \int_0^{T_0} \sin((k-n) \cdot \omega t) \, dt$$

$\rightarrow k \neq n$  $\Rightarrow \int_0^{T_0} - \, dt = 0$

$\rightarrow k = n$ $\quad \int_0^{T_0} e^{j \cdot (0) \cdot \omega_0 t} \, dt = \int_0^{T_0} 1 \cdot dt = T_0$

$\hookrightarrow \int_0^{T_0} x(t) e^{-jm\omega_0 t} dt$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k . \int_0^{T_0} e^{j(k-m)\omega_0 t} dt$$

$$= a_m . T_0 \left[+ \sum_{k \neq m} a_k . 0 \right]$$

$$\hookrightarrow a_m = \frac{1}{T_0} . \int_T x(t) . e^{-jm\omega_0 t} dt$$

SÉRIES DE FOURIER D'UN SIGNAL PÉRIODIQUE [EN TEMPS CONTINU]. FOURIER, 1822

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} & \begin{bmatrix} \text{FREQ.} \\ \downarrow \\ \text{TEMPS} \end{bmatrix} \\ \underline{a_k} = \frac{1}{T} \int_T x(t) . e^{-jk\omega_0 t} dt & \begin{bmatrix} \text{TEMPS} \\ \downarrow \\ \text{FREQ} \end{bmatrix} \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ COEFFICIENTS DE FOURIER

⚠ CONVERGENCE.

↳ SI SIGNAL ÉVOLUE AU COURS DU TEMPS

→ a_k ÉVOLUENT AU COURS DU TEMP

↳ SPECTROGRAMME ! REPRÉSENTATION 3D