SYST0002-2 Examen

Guillaume Drion

16 août 2024

Cet examen comporte 4 questions et dure 4 heures. Cet examen se déroule à livre fermé. Une calculatrice (scientifique ou non, graphique ou non) n'est **pas** autorisée. Aucun ordinateur, tablette, téléphone portable ou montre connectée n'est autorisé.e.

Justifiez vos réponses en montrant vos développements et essayez de vérifier si vos réponses ont du sens. Les réponses doivent être entièrement simplifiées sauf indication contraire.

Répondez directement sous les questions. Les verso et les pages supplémentaires peuvent être utilisés comme brouillon ou comme espace supplémentaire pour répondre aux questions. Si vous souhaitez que le travail effectué dans ces espaces supplémentaires soit corrigé, indiquez où chercher **en gros caractères** dans l'espace initialement prévu pour la réponse.

Inscrivez votre nom, prénom et identifiant ULiège sur la première page. Inscrivez uniquement votre identifiant ULiège sur toutes les autres pages.

A la fin de l'épreuve, rendez **toutes (16) les pages** du questionnaire **triées dans l'ordre indiqué en bas de page**.

Bonne chance !

Prénom et nom (en majuscules). N'écrivez pas en dehors du cadre.

ULiège ID
(lettre “s” suivie du nombre à 6 chiffres indiqué sur votre carte d'étudiant).

ULiège ID : ______________

1. **Modèle d'une épidémie.** En 1927, le biochimiste Kermack et le médecin McKendrick ont formulé le modèle mathématique SIR (*susceptible-infected-recovered* ; susceptible-infecté-guéri en français) qui deviendra mondialement connu par la suite et servira de base pour tout autre modèle de processus épidémiologique. Un tel modèle est extrêmement utile pour déterminer plusieurs caractéristiques de l'infection telles que la rapidité de contamination, comment de nombreuses personnes sont affectées, quelle proportion d'une population devrait être vaccinée, etc.
Ainsi, considérons un modèle similaire où une population peut être divisée en 3 catégories (dépendantes du temps) :
   - $s(t)$, le nombre de personnes saines
   - $i(t)$, le nombre de personnes infectées/malades
   - $m(t)$, le nombre de personnes mortes suite à l'infection/maladie.

   On fait l'hypothèse que l'épidémie évolue très vite par rapport à l'évolution, plus lente, de la société (naissances, migration, autres morts, etc). Ainsi, on peut considérer que la population totale a une taille constante et finie. Le modèle sera alors :

$$\dot{s}(t) = -\alpha s(t)i(t) \quad (1)$$
$$\dot{i}(t) = \alpha s(t)i(t) - \beta i(t) \quad (2)$$
$$\dot{m}(t) = \beta i(t) \quad (3)$$

   où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+$ $(\alpha < \beta)$ et représentent la force de l'infection et la propension d'un infecté à mourir, respectivement. Au départ, $t = 0$, on note $s_0 = s(t = 0) \geq 0, i_0 = i(t = 0) \geq 0$ et on suppose $m_0 = m(t = 0) = 0$.

   (a) Ce modèle est-il linéaire ou non linéaire ? Dans le dernier cas, donnez <u>toutes</u> les non linearités.

   Solution : Non linéaire. Non linéarité = produit des variables s et i
   Erreurs fréquentes :
   - Dire que les coefficients sont constants,
   - Dire qu'il n'y a pas de fonction non linéaire type $x^2, \cos(.)$, ...

   (b) Ce modèle est-il temps-variant ou temps-invariant ? Justifiez.

   Solution : Temps-invariant. Toutes les variables ne dépendent que de l'instant courant t donc un décalage dans t provoquera un décalage identique dans la variable dépendante, et les coefficients sont constants.
   Erreurs fréquentes :
   - Dire que $s(t)$ ou $i(t)$ est un coefficient,
   - Oublier 1 des 2 élements de la justification,
   - Dire que temps-variant car les variables dépendent du temps,
   - Dire seulement que t n'apparaît pas explicitement devant les variables dépendantes, ...

   (c) Donnez les domaines et images de <u>toutes</u> les variables.

   Solution : $t : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$; $s : \mathbb{R}^+ \to [0, s_0]$; $i : \mathbb{R}^+ \to [0, N]$
   $m : \mathbb{R}^+ \to [0, N]$ où N est la taille de la population totale.
   Erreurs fréquentes :
   - Oubli de la variable t,
   - Considérer les paramètres α, β comme des variables,
   - Donner des bornes dépendantes du temps, ...

(d) Montrez que $s + i + m = N$, où N est une constante.

Solution : Version 1 : On a $\dot{s}+\dot{i}+\dot{m} = 0 \leftrightarrow (s+i+m)^{\cdot} = 0 \leftrightarrow s+i+m = \text{constante} = N$

Version 2 : $s(t) = -\int \alpha s(t)i(t)dt + c_1$; $\quad i(t) = \int(\alpha s(t)i(t) - \beta i(t))dt + c_2$; $\quad m(t) = \int \beta i(t)dt + c_3 \quad \Rightarrow s+i+m = c_1+c_2+c_3 = N$

(e) En utilisant les équations (1) et (3), montrez que $s(t) = s_0 \exp\left(-\alpha\frac{m(t)}{\beta}\right)$.

Solution : On a $\begin{cases} \dot{s}(t) & = -\alpha s(t)i(t) \\ \dot{m}(t) & = \beta i(t) \Leftrightarrow i = \frac{\dot{m}}{\beta} \end{cases} \Leftrightarrow \dot{s} = -\alpha s\frac{\dot{m}}{\beta} \Leftrightarrow \frac{\dot{s}}{s} = -\frac{\alpha}{\beta}\dot{m}$

Après intégration : $\ln s = -\frac{\alpha}{\beta}m + \text{cste}$ où $t = 0 \Rightarrow \ln s_0 = \text{cste}$

Ainsi $s(t) = s_0 \exp\left(-\alpha\frac{m(t)}{\beta}\right)$

Erreurs fréquentes :

- Résoudre l'EDO avec la méthode des coefficients constants alors qu'ils ne le sont pas (!),
- Utiliser le résultat de l'énoncé pour démontrer qu'il est correct,
- Ne pas faire le lien entre la constante d'intégration et s_0,
- Manque de détails/calculs si utilise la transformée de Laplace unilatérale, ...

(f) Donnez une interprétation biologique de l'évolution temporelle pour $s(t)$ en fonction de la variable $m(t)$ et des paramètres α, β.

Solution : La variable $m(t)$, i.e. le nombre de personnes mortes, étant positive et les paramètres α, β étant strictement positifs également, cela implique que $s(t)$ ($s(t) = s_0 \exp(-\frac{\alpha}{\beta}m(t))$), le nombre de personnes saines, ne fera que **décroître exponentiellement**, à partir de s_0, au cours du temps (ou restera nul si $s_0 = 0$ initialement mais il s'agit d'un cas trivial). Le nombre de morts $m(t)$ ne peut faire qu'augmenter puisque les paramètres de l'épidémie α, β sont strictement positifs.

De plus, puisque $\alpha < \beta$, cela signifie que $\frac{\alpha}{\beta} < 1$. Ce **rapport** donne une indication sur la **constante de temps** τ de l'épidémie (ou de manière similaire, la vitesse de passage de s à m). Ainsi, $\tau = \frac{\beta}{\alpha} > 1$. Plus le rapport est proche de 1, plus l'épidémie est dangereuse (fortement contagieuse et mortelle) et évolue rapidement vers un état où toute la population sera morte.

La décroissance de $s(t)$ sera donc $\pm$ lente (ou rapide) selon l'évolution de $m(t)$ (plus grand/petit que β/α), le nombre de personnes décédées qui ne fera que croître. Autrement dit, $s(t)$ évolue $\pm$ rapidement selon que $m(t)$ passe le **seuil** $m_{\text{thresh}} = \frac{\beta}{\alpha}$: évolution rapide (i.e. décroissance forte du nombre de personnes saines) pour $m < m_{\text{thresh}}$ puis évolution plus lente (i.e. décroît moins vite) car il y a certes de plus en plus de personnes mortes mais il y a donc de moins en moins de personnes saines restantes qui sont susceptibles de mourir ($\Rightarrow m(t)$ augmente très lentement).

"Erreurs" fréquentes :

- Discussion des paramètres α, β séparément ("plus il est grand" ou "plus il est petit") alors que c'est le **rapport** qui importe dans ce cas-ci
- ORTHOGRAPHE !

2. **Modulation analogique d'amplitude (AM)**. De manière générale, les télécommunications sont définies comme la transmission (l'émission et la réception) d'information sous forme de signal, en utilisant des canaux de nature électrique, radioélectrique, optique ou électromagnétique. Une technique de base pour transmettre un signal d'intérêt $m(t)$ est la modulation en amplitude de ce signal (*AM* pour *Amplitude Modulation* en anglais). Cette technique analogique consiste à moduler l'amplitude d'un signal *porteur* $c(t)$ (*carrier* en anglais) de fréquence connue à l'aide du signal $m(t)$. Le signal $s(t)$ ainsi obtenu et envoyé peut ensuite être réceptionné et décodé.

   Cette question introduit un exemple élémentaire et simplifié d'une telle transmission. Pour l'exemple, considérons que le signal $m(t)$ est votre voix lorsque vous parlez dans un téléphone.

   Considérons une technique de modulation pour laquelle le signal porteur $c(t)$ est simplement multiplié par le signal $m(t)$ pour former le signal

$$s(t) = c(t)m(t),$$

   destiné à être transmis.
   Le signal porteur est donné par

$$c(t) = \cos(2\pi f_c t),$$

   avec f_c la fréquence porteuse (connue).

   (a) Donnez la transformée de Fourier $C(f)$ de $c(t)$. Dessinez les graphes en amplitude et en phase de ce spectre fréquentiel.

   Solution :

$$C(f) = \frac{1}{2}[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)],$$

   où $\delta(.)$ est la fonction delta de Dirac.
   Le graphe en amplitude présente deux raies en $\pm f_c$ et la phase est constante et nulle sur tout le spectre de fréquences.
   "Erreurs" fréquentes :

   — Confusion transformée/série
   — Transformée de base (cosinus) non maîtrisée

   (b) Pour un signal quelconque $m(t)$ de transformée $M(f)$, donnez la forme générale de la transformée $S(f)$ de $s(t)$ en fonction de $M(f)$.

   Solution :

$$S(f) = C(f) * M(f) = \frac{1}{2}[M(f - f_c) + M(f + f_c)].$$

(c) Le spectre fréquentiel (*i.e.* la transformée de Fourier) du signal d'intérêt $m(t)$ est donné en amplitude par

$$|M(f)| = \begin{cases} A\left(\frac{f+f_M}{f_M}\right) & \text{si } f \in [-f_M, 0], \\ A\left(\frac{f_M-f}{f_M}\right) & \text{si } f \in]0, f_M], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dessinez le spectre $S(f)$ en amplitude en considérant les deux cas suivants :

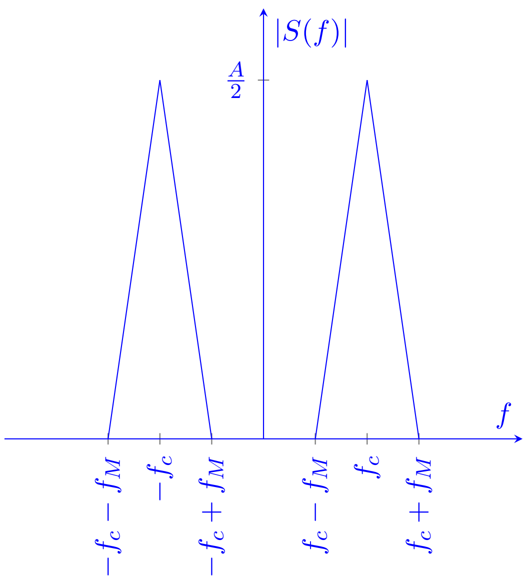
(i) $f_c > f_M$ (prenez $f_M = 1$ Hz et $f_c = 1.25 f_M$ Hz pour faciliter le dessin),

(ii) $f_c < f_M$ (prenez $f_M = 1$ Hz et $f_c = 0.75 f_M$ Hz pour faciliter le dessin).

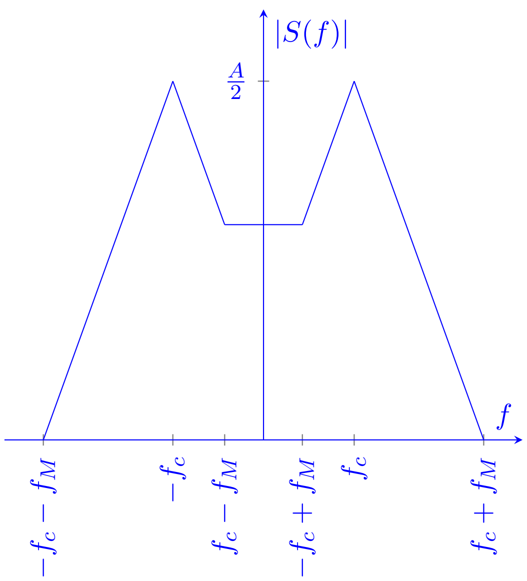
Toutes les fréquences et amplitudes d'intérêt doivent apparaître sur le dessin.

Solution :

(i) $f_c > f_M$:



(ii) $f_c < f_M$:



(d) Une fois le signal $s(t)$ envoyé, il peut être réceptionné et décodé. Considérons ici une détection simplifiée consistant à multiplier le signal $s(t)$ (supposé égal avant et après passage dans un canal de transmission) par $c(t)$, et notons

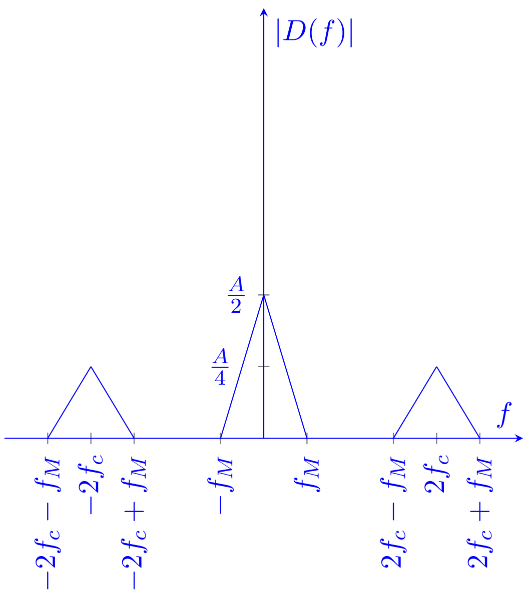
$$d(t) = c(t)s(t)$$

le signal résultant.
Dessinez le spectre $D(f)$ en amplitude en considérant à nouveau les deux cas suivants (et les valeurs données au point précédent) :

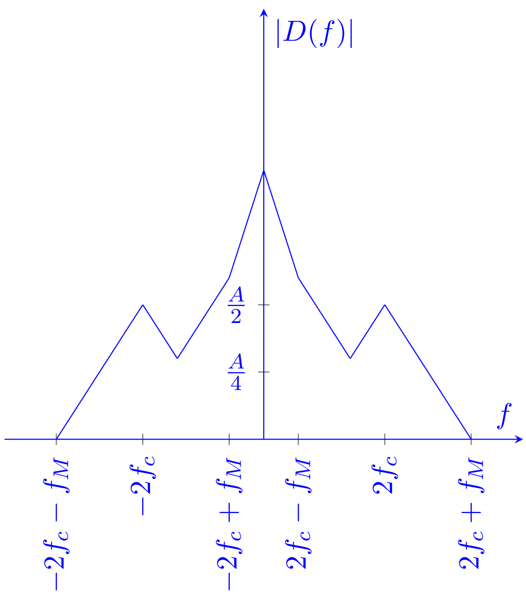
(i) $f_c > f_M$,
(ii) $f_c < f_M$.

Solution :

(i) $f_c > f_M$:



(ii) $f_c < f_M$:



(e) La dernière étape de notre transmission simplifiée consiste à appliquer un filtre au signal $d(t)$ afin de retrouver le signal de départ $m(t)$. Sur base des spectres dessinés au point précédent,

(i) quel type de filtre idéal doit-on appliquer au signal $d(t)$ pour retrouver le signal $m(t)$?
Indice : on désire donc retrouver le spectre $M(f)$, à une constante multipliante de l'amplitude près.

(ii) quelle(s) doit(doivent) être la(les) fréquence(s) de coupure de ce filtre idéal ?

(iii) quelle condition sur f_c doit-on avoir pour qu'appliquer le filtre idéal donné ci-dessus permette de retrouver $m(t)$? En particulier, quelle valeur *minimale* de f_c doit-on avoir ?
Conseil : comparez les deux cas étudiés ci-dessus.

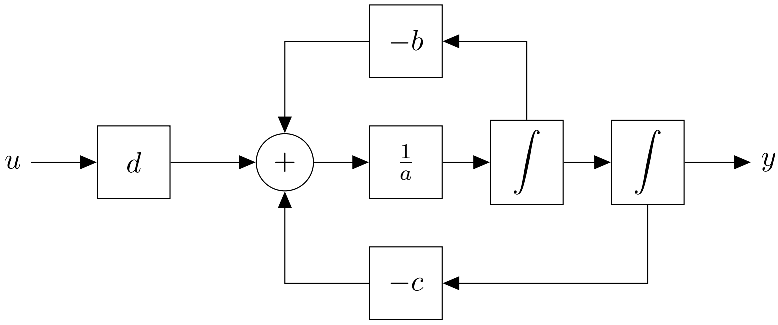
Solution :

(i) filtre passe-bas.

(ii) $f_{cut} = f_M$.

(iii) $f_c \geq f_M$ sinon recouvrement.

3. **Analyse dans le domaine de Laplace**. Un système peut être représenté par le bloc diagramme suivant, dans le domaine temporel :



(a) Donnez l'équation entrée-sortie du système schématisé ci-dessus, l'entrée étant dénotée par u et la sortie par y. Donnez également un modèle d'état du système, *i.e.* explicitez les variables d'entrée, sortie, et d'état ainsi que les matrices A, B, C et D de la représentation d'état.

Solution : L'équation entrée-sortie est donnée par

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = du.$$

On choisit comme variables d'état $(x_1, x_2) = (y, \dot{y})$ (les sorties des blocs intégrateurs). On a donc les lois de mise-à-jour et de sortie suivantes :

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2, \quad \dot{x}_2 = \ddot{y} = \frac{1}{a}[-bx_2 - cx_1 + du], \quad y = x_1,$$

desquelles on déduit

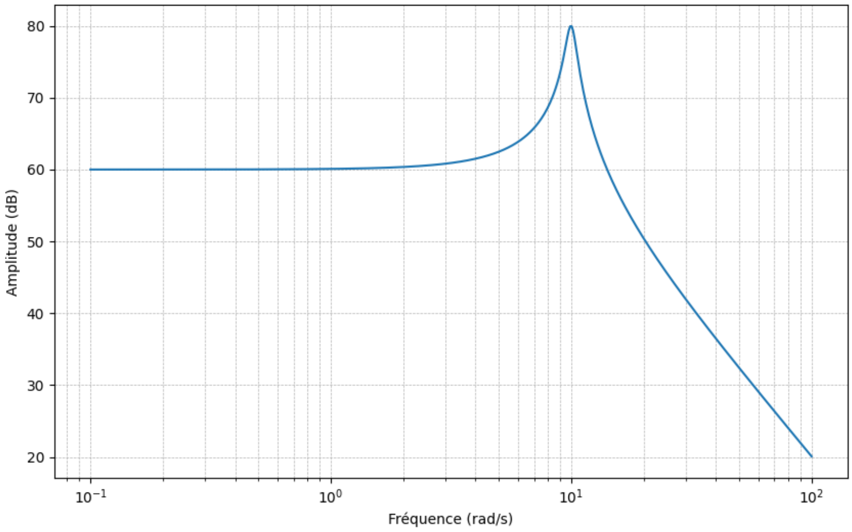
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c/a & -b/a \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ d/a \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Donnez la fonction de transfert $H(s)$ du système, à partir de l'équation entrée-sortie ou de la représentation d'état, au choix.

Solution :

$$H(s) = \frac{d}{as^2 + bs + c}.$$

(c) Le diagramme suivant est le diagramme de Bode en amplitude du système défini par $H(s)$.



En considérant $a = 1$, identifiez les paramètres b, c, d pour que le diagramme et la fonction de transfert concordent. Le facteur d'amortissement du système est donné $\zeta = 0.05$, et on considère que la fréquence naturelle et la fréquence de résonance sont confondues.

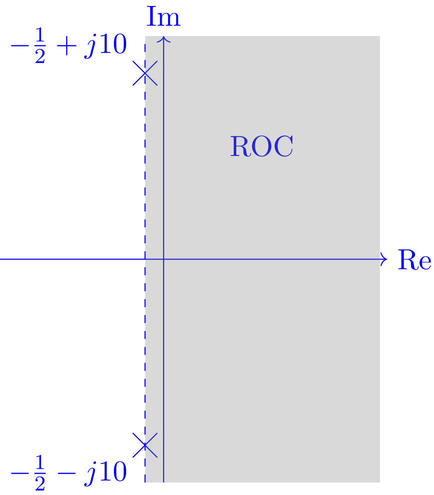
Solution : Par inspection, on trouve $\omega_0 = 10$, $K = 1000$, les paramètres d'une fonction de transfert du deuxième ordre sous la forme canonique

$$H(s) = \frac{K\omega_0}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}.$$

On en déduit $b = a = 1$, $c = 100$ et $d = 10^5$.

(d) Donnez *et représentez dans le plan complexe* les pôle(s) et zéro(s) de $H(s)$, **ainsi que** la ROC du système causal associé. Ce système est-il stable ? Justifiez.

Solution : $H(s)$ ne possède pas de zéro. Les pôles sont donnés par $s^2 + s + 100 = 0$ qui donne $p_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{-399}}{2} \approx -\frac{1}{2} \pm i10$. La ROC du système causal associé est donnée par $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > -1/2\}$. La représentation dans le plan complexe est donnée par la figure ci-dessous.



La partie réelle des deux pôles étant négative (autrement dit, la ROC du système causal contient l'axe imaginaire), le système causal associé est stable.

(e) Donnez la réponse impulsionnelle du système $h(t)$.

Solution : La décomposition en fractions simples de $H(s)$ donne

$$H(s) = \frac{A}{s - p_1} + \frac{B}{s - p_2} = 5 \times 10^3 i \left(\frac{1}{s - p_2} - \frac{1}{s - p_1} \right),$$

qui se développe comme

$$H(s) = 5 \times 10^3 i \left(\frac{1}{s + 1/2 + 10i} - \frac{1}{s + 1/2 - 10i} \right)$$

d'où l'on dérive

$$\begin{aligned} h(t) &= 10^4 e^{-t/2} \left(\frac{e^{10it} - e^{-10it}}{2i} \right) \mathbb{1}(t) \\ &= 10^4 e^{-t/2} \sin(10t) \mathbb{1}(t) \end{aligned}$$

en utilisant les propriétés de Laplace et les transformées élémentaires, et en utilisant la formule d'Euler pour le sinus.

(f) Le signal d'entrée est donné par

$$u(t) = [\frac{1}{4}e^{-2t}\cos(6t) + \frac{3}{4}t\cos(3t)]\mathbb{I}(t).$$

Donnez la transformée de Laplace $U(s)$ de $u(t)$ **et** la ROC associée. **Justifiez** les calculs.

Solution : En utilisant les propriétés de la transformée de Laplace (linéarité, décalage et dérivée fréquentiels) et en partant des transformées élémentaires, on trouve

$$U_1(s) = \frac{1}{4}\frac{s+2}{s^2+4s+40}$$

et

$$U_2(s) = \frac{3}{4}\frac{s^2-9}{(s^2+9)^2},$$

avec $u_1(t) = \frac{1}{4}e^{-2t}\cos(6t)\mathbb{I}(t)$ et $u_2(t) = \frac{3}{4}t\cos(3t)\mathbb{I}(t)$.
On obtient donc, par linéarité à nouveau,

$$U(s) = U_1(s) + U_2(s) = \frac{1}{4}\left(\frac{s+2}{s^2+4s+40} + 3\frac{s^2-9}{(s^2+9)^2}\right)$$

avec ROC $= \{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 0\}$ (*cfr.* ROC pour $cos(\omega_0 t)$).

(g) Dans le domaine de Laplace, donnez la réponse totale $Y(s)$ du système $H(s)$ pour l'entrée $U(s)$, si le système a comme conditions initiales $y(0^-) = 0$ et $\dot{y}(0^-) = 1$. Identifiez la réponse libre et la réponse forcée dans la réponse totale.
Remarque : il n'est pas nécessaire de simplifier la forme de $Y(s)$.

Solution : De manière générale, la réponse totale du système dans le domaine de Laplace est donnée par

$$Y(s) = U(s)H(s) + C(sI - A)^{-1}x(0)$$

où x est le vecteur d'état. La réponse libre correspond à la partie donnée par le produit $U(s)H(s)$, tandis que la réponse forcée correspond au reste de la réponse totale.
On a donc

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{4}\left(\frac{s+2}{s^2+4s+40} + 3\frac{s^2-9}{(s^2+9)^2}\right)\frac{100000}{s^2+s+100} + \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\left(sI - \begin{pmatrix}0 & 1\\ -100 & -1\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{s+2}{s^2+4s+40} + 3\frac{s^2-9}{(s^2+9)^2}\right)\frac{100000}{s^2+s+100} + \frac{1}{s^2+s+100} \\
&= \frac{1}{s^2+s+100}\left[25000\left(\frac{s+2}{s^2+4s+40} + 3\frac{s^2-9}{(s^2+9)^2}\right) + 1\right].
\end{aligned}$$

4. **Vrai ou Faux.** Justifiez votre réponse. (0.25 point/réponse correcte ; 0.75 point/justification correcte.) Erreur fréquente : Manque de précision dans les justifications → justification incomplète.

   (a) Pour un système à N dimensions, si l'on a $\lambda_1 = 0 > \lambda_2 > \lambda_3 > \cdots > \lambda_N$ au point d'équilibre, alors ce dernier est stable.

   Solution : Faux. Le point d'équilibre est marginalement stable selon la direction λ_1 puisque $\lambda_1 = 0$ (bifurcation), et stable selon les autres directions. Ainsi, le point d'équilibre est globalement marginalement stable.

   (b) La matrice de dynamique de tout système LTI est toujours carrée.

   Solution : Vrai. La matrice de dynamique A lie le vecteur d'état au vecteur des dérivées premières. Pour un système LTI, la dimension du vecteur d'état ne change pas au cours du temps. Ainsi, il y aura autant de dérivées premières que d'état. La matrice A doit donc être toujours carrée.

   (c) Il existe une application bijective de l'ensemble des modèles d'état vers l'ensemble des fonctions de transfert, *i.e.* à une fonction de transfert donnée correspond un et un seul modèle d'état.

   Solution : Faux. La représentation A, B, C, D n'est pas unique ; il existe donc plusieurs modèles d'état qui peuvent correspondre à un même système. A contrario, pour un système dynamique donné, une seule et unique fonction de transfert H lui est associée. Il y a donc un *many-to-one* mapping de A, B, C, D vers H.

   (d) La convolution n'est pas valable pour des systèmes non linéaires mais bien pour des systèmes temps-variant.

   Solution : Sous-question annulée car ambiguë (il manque $y(t) = u(t) * h(t)$ après le mot "convolution").
   Faux. La convolution $y(t) = u(t) * h(t)$ n'est valable que pour des systèmes linéaires et temps-invariants.

   (e) Soient $e(t), f(t), g(t), h(t)$ des fonctions continues et différentes de 0 pour tout temps t. La convolution $f * g$ n'est pas équivalente à la convolution $(g * \frac{h}{e}) * (f * \frac{e}{h})$.

   Solution : Vrai. Par associativité et commutativité, on a $g*(f*\frac{h}{e})*\frac{e}{h} = (f*g)*(\frac{h}{e}*\frac{e}{h})$. En écrivant la formule du produit de convolution pour $(\frac{h}{e} * \frac{e}{h})$, on voit que ce dernier est différent de δ (car $f * \delta = f$). D'une autre manière, en passant dans le domaine fréquentiel (i.e. Fourier ou même Laplace ; les fonctions doivent être individuellement intégrables sinon $\frac{h}{e}$ ou $\frac{e}{h}$ n'est pas possible), on a $\mathcal{F}\{f*g\}.\mathcal{F}\{\frac{h}{e}*\frac{e}{h}\} = \mathcal{F}\{f*g\}.\mathcal{F}\{\frac{h}{e}\}.\mathcal{F}\{\frac{e}{h}\}$. L'énoncé est faux ssi la transformée de Fourier d'un quotient est égale au quotient des Tr. Fourier et/ou $\mathcal{F}\{\frac{h}{e}\} = \frac{1}{\mathcal{F}\{\frac{e}{h}\}}$. Il existe des fonctions intégrables et non-nulles telles qu'aucune des 2 propositions n'est vérifiée (i.e. test avec $e(t) = 1$ pour $|t| \leq \frac{T}{2}$ et $h(t) = e^{-a|t|}$ avec $a > 0$)

(f) Pour un système à N dimensions où toutes les valeurs propres sont négatives et classées par ordre décroissant, la dynamique la plus lente est selon la direction λ_N.

Solution : Faux. Puisque λ_N est la plus négative des valeurs propres, cela implique que le temps de réponse le long de la direction du vecteur propre associé sera le plus court (i.e. $\tau_N = -\frac{1}{\lambda_N} \ll 1$) et donnera donc la réponse la plus rapide. La dynamique la plus lente se produit donc le long de la direction du vecteur propre associé à λ_1.

(g) En sachant que $R_1C_1 > R_2C_2$, le filtre de fonction de transfert

$$H(s) = -\frac{R_2}{R_1}\frac{R_1C_1 \cdot s}{R_1C_1R_2C_2 \cdot s^2 + s(R_1C_1 + R_2C_2) + 1}$$

est un filtre passe-bande.

Solution : Vrai. $|H(0)| = -\infty$; zéro en $s = 0 \to +20$ dB/dec ; pôles en $p_1 = \frac{1}{R_1C_1}$ et $p_2 = \frac{1}{R_2C_2}$ avec $p_1 < p_2$. On a donc +20 dB/dec de 0 à p_1 ; 0 dB/dec entre p_1 et p_2 et -20 dB/dec à partir de p_2. Il s'agit donc d'un filtre passe-bande entre p_1 et p_2.

(h) Tout signal périodique centré en $t = 0$ donne toujours des coefficients de Fourier a_k et a_{-k} identiques. Autrement dit, pour tout signal périodique et symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, et pour une harmonique k fixée, le coefficient de Fourier pour la fréquence positive est identique à celui pour la fréquence négative.

Solution : Vrai. Fonction paire aura uniquement des coefficients non nuls pour des cosinus où $\cos(k\omega) = \cos(-k\omega)$ est paire donc $c_k = c_{-k}$.

(i) Pour un système 2D, la création/destruction de points fixes (i.e. *saddle-node bifurcation*) se produit quand le déterminant de la matrice A est nul et pour toute trace de A.

Solution : Vrai. Une saddle-node bifurcation ne peut se produire que si $\Delta = 0$. A cet endroit, il peut y avoir collision entre un noeud stable et un noeud instable. Toute petite perturbation fera de l'équilibre un noeud stable, un noeud instable (selon la valeur de τ) ou un point de selle.

(j) Pour une même fonction de transfert $H(s)$ admettant au moins 2 pôles et 2 ROCs possibles selon que le système est causal ou anti-causal, l'une de ces 2 ROCs contient forcément l'axe imaginaire pour que la transformée de Fourier existe.

Solution : Faux. Si le plus petit des pôles est négatif et que le plus grand des pôles est positif alors seul le système non causal aura une ROC contenant l'axe imaginaire.

Extra page 1. Keep calm.

Extra page 2. Don't panic.

Extra page 3. Everything's gonna be alright.