

SYST0002-2 Examen

Guillaume Drion

9 janvier 2024

Cet examen comporte 4 questions et dure 4 heures. Cet examen se déroule à livre fermé. Une calculatrice (scientifique ou non, graphique ou non) n'est **pas** autorisée. Aucun ordinateur, tablette, téléphone portable ou montre connectée n'est autorisé.e.

Justifiez vos réponses en montrant vos développements et essayez de vérifier si vos réponses ont du sens. Les réponses doivent être entièrement simplifiées sauf indication contraire.

Répondez directement sous les questions. Les verso et les pages supplémentaires peuvent être utilisés comme brouillon ou comme espace supplémentaire pour répondre aux questions. Si vous souhaitez que le travail effectué dans ces espaces supplémentaires soit corrigé, indiquez où chercher **en gros caractères** dans l'espace initialement prévu pour la réponse.

Inscrivez votre nom, prénom et identifiant ULiège sur la première page. Inscrivez uniquement votre identifiant ULiège sur toutes les autres pages.

A la fin de l'épreuve, rendez **toutes (18) les pages** du questionnaire **triées dans l'ordre indiqué en bas de page**.

Bonne chance!

Prénom et nom (en majuscules). N'écrivez pas en dehors du cadre.

ULiège ID

(lettre "s" suivie du nombre à 6 chiffres indiqué sur votre carte d'étudiant).

1. Théorie - Questionnaire à choix multiples

Une seule proposition est correcte. Entourez la bonne réponse. Une bonne réponse vaut +1, pas de réponse vaut 0, une mauvaise réponse vaut 0.

- (a) Pour un système 2D, si on s'intéresse à la stabilité d'un point fixe (PF), lequel des cas suivants n'est pas robuste à des petites perturbations non-linéaires ?
- Un noeud étoile
 - Un centre
 - Un point de selle
 - Un noeud instable

Solution : ii

- (b) Soit un système LTI d'équation entrée-sortie $\ddot{y} + a\dot{y} + by = cu_1 + u_2$ avec \mathbf{R} le domaine image de $y(t)$, $u_1(t)$, et $u_2(t)$, et $a, b, c \in \mathbf{R}$. Quelles seront les dimensions des matrices d'état A,B,C,D ?
- Impossible à savoir sur base de l'équation entrée-sortie uniquement.
 - A : 2×2 ; B : 2×1 ; C : 1×2 ; D : 1×1
 - A : 1×2 ; B : 1×1 ; C : 1×2 ; D : 1×1
 - A : 2×2 ; B : 2×2 ; C : 1×2 ; D : 1×2

Solution : iv

- (c) Supposons que la réponse impulsionnelle d'un système causal soit $h(t) = e^{-at}\mathbb{1}(t)$, $a > 0$. Comment évolue la mémoire de ce système en fonction de a ?
- Elle augmente si a diminue
 - Elle augmente si a augmente
 - L'évolution de la mémoire est indépendante de la valeur de a
 - Impossible à déterminer

Solution : i

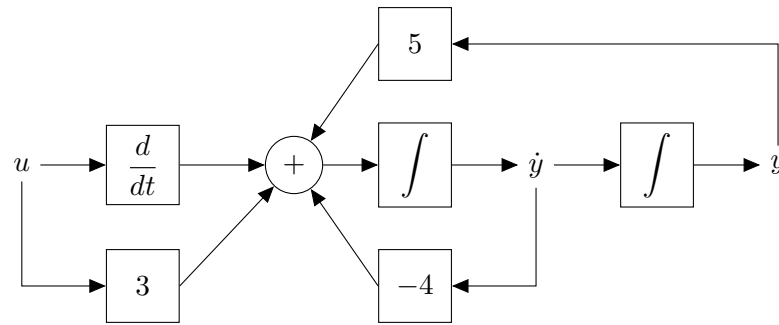
- (d) Le système décrit par l'équation différentielle $\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) = \dot{u}(t) + \frac{5+\sin(t)}{7}u(t)$ est
- linéaire et temps-invariant
 - linéaire et temps-variant
 - non causal
 - Les propositions ii) et iii) sont correctes

Solution : ii

- (e) La relation $y(t) = u(t) * h(t)$, où $y(t)$ est la réponse d'un système à une entrée $u(t)$ et $h(t)$ sa réponse impulsionnelle, est correcte
- pour tous les systèmes dynamiques
 - pour tous les systèmes dynamiques linéaires
 - pour tous les systèmes dynamiques linéaires et temps-invariants
 - pour tous les systèmes dynamiques linéaires et temps-variants

Solution : iii

- (f) Soit le bloc diagramme suivant :



A quelle fonction de transfert $H(s)$ correspond-il ?

- i) $H(s) = \frac{(s-1)(s+5)}{s+3}$
- ii) $H(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s-5)}$
- iii) $H(s) = \frac{s+3}{(s-1)(s+5)}$
- iv) Impossible à déterminer sur base du bloc diagramme uniquement.

Solution : iii

(g) Un système de second ordre

- i) peut avoir une réponse impulsionnelle non monotone
- ii) a toujours une réponse impulsionnelle non monotone
- iii) a toujours une réponse impulsionnelle monotone
- iv) peut avoir une réponse monotone si son coefficient d'amortissement $1 > \zeta > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : i

(h) Le système causal de fonction de transfert

$$H(s) = \frac{100(s^2 + 10s + 100)}{(s + 0.1)(s + 1000)}$$

est un filtre

- i) Passe-bas
- ii) Passe-haut
- iii) Passe-bande
- iv) Coupe-bande

Solution : iv

(i) Laquelle des propositions suivantes est vraie ?

- i) Si un système est causal alors la transformée de Fourier de sa réponse impulsionnelle existe
- ii) Si la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle existe alors le système est causal
- iii) La transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle existe si et seulement si un système est non causal
- iv) Aucune des propositions ci-dessus n'est vraie

Solution : iv

- (j) Laquelle des propositions suivantes est vraie ?
- i) Un signal résultant de la somme de fonctions périodiques possède des spectres en amplitude et en phase continus
 - ii) La transformée de Fourier de n'importe quel signal existe si et seulement si la transformée de Laplace correspondante existe
 - iii) Les transformations de signaux suivantes sont équivalentes si appliquées sur un signal $x(t)$ quelconque :
 1. $t \rightarrow \frac{t}{25} \Rightarrow t \rightarrow t + 15 \Rightarrow t \rightarrow 5t \Rightarrow t \rightarrow -t$
 2. $x\left(\frac{-t}{5} + 0.6\right)$
 - iv) Les opérations suivantes sont équivalentes (où $\mathcal{L}\{z\}$ est la transformée de Laplace d'un signal z et $\mathcal{L}^{-1}\{z\}$ la transformée de Laplace inverse d'un signal z) :
 1. $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{x(t)\}\}$
 2. $x(t) = \mathcal{L}\{\mathcal{L}^{-1}\{x(t)\}\}$

Solution : iii

2. Soit la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + 2u \end{cases}$$

(a) Donnez l'(les) expression(s) de la(des) nullcline(s). Justifiez.

Solution : $\dot{x}_1 = 0 = x_2$
 $\dot{x}_2 = 0 = -6x_1 - 5x_2 + u$

Attention : La majorité d'entre vous n'a pas l'air de bien connaître la distinction entre nullclines et point fixe. . . De plus, y est votre SORTIE et non une variable d'état ; elle ne doit donc pas intervenir dans le calcul des nullclines (et point fixe par la suite !)

(b) Donnez l'(les) expression(s) du(des) point(s) fixe(s) pour une entrée $u(t) = 6(1 - e^{-3t})\mathbb{1}(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$. Justifiez.

Solution : Puisque $u(t)$ est dans son état stationnaire, on a $u^* = 6$ Les PFs sont les intersections des nullclines, i.e. $\dot{x}_1 = 0 = \dot{x}_2$. On a alors $x_2^* = 0$ et $0 = -6x_1^* + u^* \Leftrightarrow x_1^* = \frac{u^*}{6} = 1$. Le seul PF est donc $(1, 0)$.

Erreurs fréquentes :

- Confondre fonction échelon avec delta de Dirac
- Prendre $\mathbb{1}(t \rightarrow +\infty) = 0$
- Ne pas faire le développement pour e^{-3t} et $\mathbb{1}(t)$ quand $t \rightarrow +\infty \rightarrow$ Valeur finale pour $u(t)$ incorrecte.
- Considérer que les PF sont égaux aux valeurs propres

(c) Donnez la(les) nature(s) du(des) point(s) fixe(s). Justifiez.

Solution : La nature du PF est donnée par les valeurs propres λ de la matrice Jacobienne évaluée au PF. Cette dernière correspond à la matrice d'état A du système linéaire donné et est constante (donc indépendante de la valeur du PF). Ainsi,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

et on obtient $\tau = -5$, $\Delta = 6 \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases}$ Puisque les 2 valeurs propres sont réelles et négatives, le PF est un noeud stable.

Erreurs fréquentes :

- Justification incomplète : Oublier de préciser que la matrice Jacobienne doit être évaluée au PF (même si dans ce cas-ci, la matrice reste constante), oublier de préciser qu'on utilise la matrice Jacobienne.
- Erreur de calcul sur déterminant et/ou valeurs propres !
- Classification incomplète : Donner la stabilité n'est pas suffisant !

(d) Donnez le champ de vecteurs (qualitatifs). Expliquer.

Solution : Le champ de vecteurs correspond à l'ensemble des vecteurs vitesses $(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))$ originaires des points $(x_1(t), x_2(t))$ (avec t variant) dans le plan de phase. Les vitesses \dot{x}_1, \dot{x}_2 sont données en fonction de x_1, x_2, u par
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -6x_1 - 5x_2 + u \end{cases}$$
. Puisque le système est à 2 dimensions, l'évolution selon la direction horizontale (resp. verticale) sera donnée par \dot{x}_1 (resp. \dot{x}_2) (ou vice-versa) via son signe et sa valeur absolue (plus la valeur est grande, plus l'évolution est rapide). Le vecteur vitesse est alors la résultante ou combinaison des composantes individuelles pour \dot{x}_1 et \dot{x}_2 (voir tableau ci-dessous). **N.B. :** Pour ceux/celles qui ont pris des valeurs pour x_1 et x_2 pour déterminer la direction du vecteur, ils/elles doivent être conscient.e.s qu'en toute généralité, la réponse dépend alors de la valeur de u intervenant dans \dot{x}_2 ! Dans ce cas-ci, la question visait le cas général et non le cas particulier où $u(t \rightarrow +\infty) = 6$. Cela n'a cependant pas été sanctionné cette fois-ci.

$\dot{x}_2 \backslash \dot{x}_1$	$\dot{x}_1 < 0 : \leftarrow$	$\dot{x}_1 = 0 : /$	$\dot{x}_1 > 0 : \rightarrow$
$\dot{x}_2 < 0 : \downarrow$	\swarrow	\downarrow	\searrow
$\dot{x}_2 = 0 : /$	\leftarrow	$/$ (PF)	\rightarrow
$\dot{x}_2 > 0 : \uparrow$	\nwarrow	\uparrow	\nearrow

(e) Dessinez le plan de phase en mettant clairement et explicitement en évidence nullcline(s), point(s) fixe(s) et champ de vecteurs qualitatifs pour $u(t)$ dans son état stationnaire. Dessinez également sur le plan de phase de manière la plus propre et précise possible la trajectoire issue de $x_{0,a} = (x_1(0), x_2(0)) = (2, -2)$ et de $x_{0,b} = (x_1(0), x_2(0)) = (2, 1)$.

Suggestion : N'oubliez pas de déterminer et de tracer le(s) vecteur(s) propre(s), qui facilite(nt) l'esquisse du champ de vecteurs.

Solution : Pour rappel, x_1 -nullcline $\leftrightarrow x_2 = 0$ et x_2 -nullcline $\leftrightarrow x_2 = \frac{-6}{5}(1 - x_1)$.
 $x_{0,a}$: Direction VeP 1 $((1, -2)^T$; jaune) \rightarrow linéaire! (VeP₂ = $(1, -3)^T$; mauve)
 $x_{0,b}$: trajectoire = trajectoire courbe (bleu clair) sur plan de phase, vitesse relative des vecteurs propres à respecter

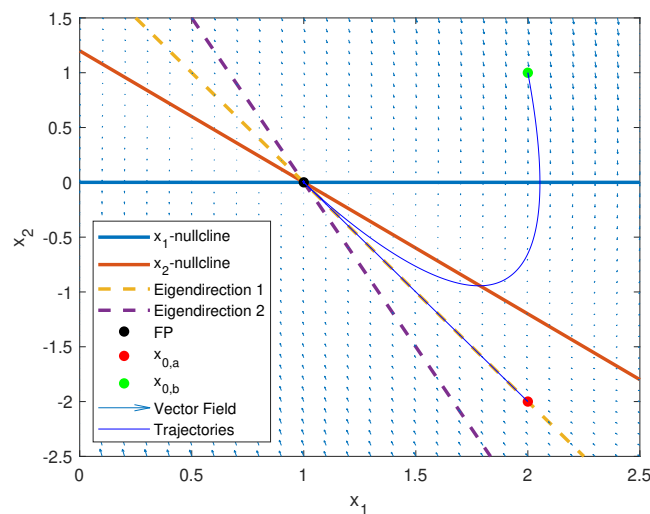
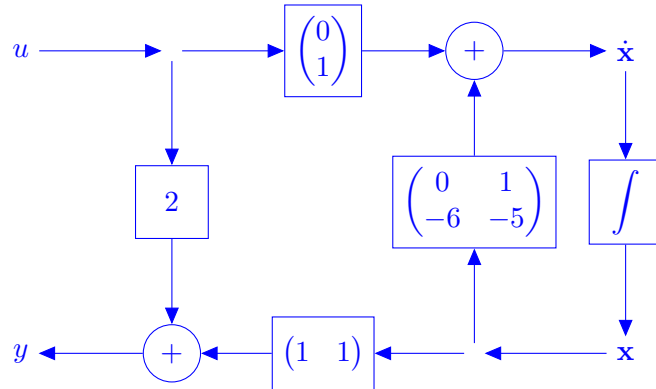


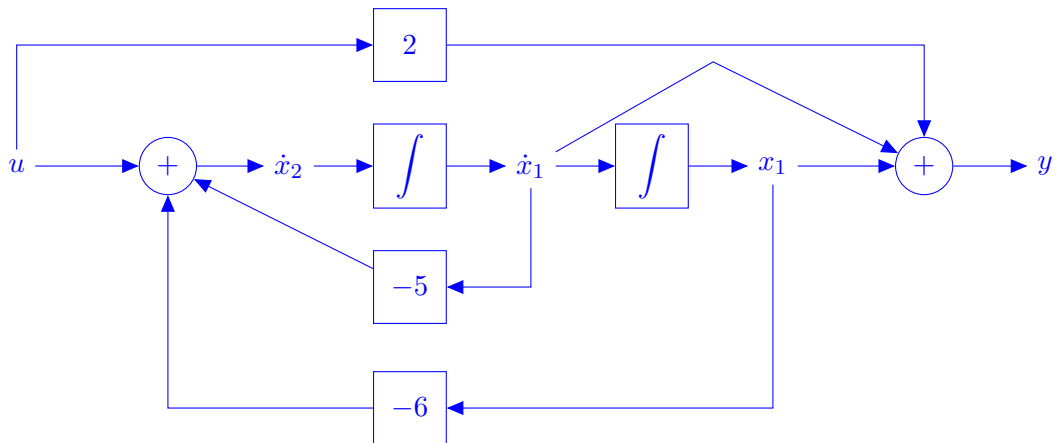
FIGURE 1 – Plan de phase du système

(f) Tracez un bloc diagramme représentant ce système et utilisant le moins de blocs intégrateurs possibles.

Solution : Version 1 : Matricielle



Version 2 : Équations développées



Erreurs fréquentes :

- Utiliser un signe sommatoire intermédiaire pour faire le lien $x_2 = \dot{x}_1$.
- Considérer arbitrairement que $y = x_1$.
- Manque de flèches claires pour indiquer le flux/sens des différents signaux (pas sanctionné ici mais votre réponse doit être claire, explicite et non ambiguë!).
- Faire converger des signaux sur une branche ou un signal (par exemple y). Ces interconnexions n'ont PAS DE SENS sans symbole sommatoire.
- Utilisation de coefficients superflus/inutiles (coefficient 0, 1, ...).

- (g) Déterminez l'équation entrée(s)-sortie(s) associée à cette représentation d'état.
Suggestion : Développez l'équation de sortie ainsi que ses dérivées temporelles.

Solution : On a $y = x_1 + x_2 + 2u$. L'ordre de dérivation le plus élevé autorisé/cohérent sur y est 2 puisqu'il s'agit d'un système 2D. Ainsi, on a

$$\dot{y} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 + 2\dot{u} = -6x_1 - 4x_2 + u + 2\dot{u}$$

et

$$\ddot{y} = -6\dot{x}_1 - 4\dot{x}_2 + \dot{u} + 2\ddot{u} = 24x_1 + 14x_2 - 4u + \dot{u} + 2\ddot{u}.$$

La dernière équation peut aussi se réécrire comme

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \alpha y + \beta \dot{y} + \gamma u + \delta \dot{u} + \epsilon \ddot{u} \\ &= \alpha(x_1 + x_2 + 2u) + \beta(-6x_1 - 4x_2 + u + 2\dot{u}) + \gamma u + \delta \dot{u} + \epsilon \ddot{u} \\ &= x_1(\alpha - 6\beta) + x_2(\alpha - 4\beta) + u(2\alpha + \beta + \gamma) + \dot{u}(2\beta + \delta) + \epsilon \ddot{u}. \end{aligned}$$

On obtient alors un système de 5 équations à 5 inconnues où on trouve rapidement que

$$\begin{cases} \alpha = -6 \\ \beta = -5 \\ \gamma = 13 \\ \delta = 11 \\ \epsilon = 2. \end{cases}$$

L'équation entrée-sortie finale est donc

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = 13u + 11\dot{u} + 2\ddot{u}.$$

Méthode alternative = Méthode de la variable auxiliaire à l'envers :

Soit $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} v \\ \dot{v} \end{pmatrix}$ (qui vérifie bien $\dot{x}_1 = x_2$), le système d'équation peut alors se réécrire comme

$$\begin{cases} \ddot{v} = -6v - 5\dot{v} + u \\ y = v + \dot{v} + 2u \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \ddot{v} + 6v + 5\dot{v} = u \\ y = v + \dot{v} + 2(\ddot{v} + 6v + 5\dot{v}) \end{cases}$$

Le système avec la variable auxiliaire est donc

$$\begin{cases} \ddot{v} + 6v + 5\dot{v} &= u \\ y &= 2\ddot{v} + 11\dot{v} + 13v \end{cases}$$

En appliquant la méthode des variables auxiliaires à l'envers, on trouve

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = 13u + 11\dot{u} + 2\ddot{u}$$

- (h) Déterminez la fonction de transfert $H(s)$ associée à ce système sur base des matrices A, B, C et D (n'utilisez pas l'équation entrée-sortie développée à la question précédente). Donnez également le(s) pôle(s) et le(s) zéros. Justifiez.

Solution : On sait que $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ avec I la matrice identité de même taille que A et s , la variable complexe. On a alors

$$H(s) = (1 \quad 1) \underbrace{\begin{pmatrix} s & -1 \\ 6 & s+5 \end{pmatrix}^{-1}}_M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2.$$

La matrice inverse M est donnée par

$$M = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} \begin{pmatrix} s+5 & 1 \\ -6 & s \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{s^2 + 5s + 6} (1 \quad 1) \begin{pmatrix} s+5 & 1 \\ -6 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \\ &= \frac{1}{s^2 + 5s + 6} (1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} + 2 \\ &= \frac{s+1}{s^2 + 5s + 6} + 2 \\ &= \frac{2s^2 + 11s + 13}{s^2 + 5s + 6}. \end{aligned}$$

Les pôles sont donnés par $s^2 + 5s + 6 = 0 \leftrightarrow p_{1,2} = \begin{cases} -2 \\ -3. \end{cases}$

Les zéros sont donnés par $2s^2 + 11s + 13 = 0 \leftrightarrow z_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{17}}{4}$.

Erreurs fréquentes :

- Oublier de calculer les pôles et les zéros.
- Erreur de calcul (dans la multiplication des matrices).
- Erreur de calcul de la matrice inverse !

3. (a) Soit le signal d'entrée défini par

$$u(t) = \begin{cases} 2 \cos(\omega_f t) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère un système de réponse impulsionnelle $h(t)$ définie par

$$h(t) = \mathbb{1}(t + 2) - \mathbb{1}(t).$$

Calculez, en utilisant le produit de convolution analytique dans le domaine temporel, la sortie $y(t)$ du système défini par $h(t)$ pour l'entrée $u(t)$.

Solution : Le produit de convolution entre les signaux $u(t)$ et $h(t)$ est donné par

$$\begin{aligned} y(t) = u(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [2 \cos(\omega_f \tau) \mathbb{1}(\tau)] \mathbb{1}(t - \tau + 2) d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} [2 \cos(\omega_f \tau) \mathbb{1}(\tau)] \mathbb{1}(t - \tau) d\tau \\ &= 2 \left(\int_0^{+\infty} \cos(\omega_f \tau) \mathbb{1}(t - \tau + 2) d\tau - \int_0^{+\infty} \cos(\omega_f \tau) \mathbb{1}(t - \tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

Attention : une erreur fréquente a été d'oublier l'échelon de $u(t)$ dans l'intégrale, ce qui fausse tout le développement.

Plusieurs cas sont à considérer :

- $t < -2$: $y(t) = 0$
- $-2 < t < 0$:

$$\begin{aligned} y(t) &= 2 \int_0^{t+2} \cos(\omega_f \tau) d\tau \\ &= \frac{2}{\omega_f} [\sin(\omega_f \tau)]_0^{t+2} \\ &= \frac{2}{\omega_f} \sin(\omega_f(t+2)). \end{aligned}$$

- $t > 0$

$$\begin{aligned} y(t) &= 2 \left(\int_0^{t+2} \cos(\omega_f \tau) d\tau - \int_0^t \cos(\omega_f \tau) d\tau \right) \\ &= 2 \int_0^{t+2} \cos(\omega_f \tau) d\tau - 2 \int_0^t \cos(\omega_f \tau) d\tau \\ &= \frac{2}{\omega_f} \sin(\omega_f(t+2)) - \frac{2}{\omega_f} [\sin(\omega_f \tau)]_0^t \\ &= \frac{2}{\omega_f} \sin(\omega_f(t+2)) - \frac{2}{\omega_f} \sin(\omega_f t). \end{aligned}$$

Attention : une erreur fréquente a été d'ignorer ces différents cas sur t , et de ne se concentrer que sur les intervalles pour lesquels l'intégrale n'était pas nulle pour $t \geq 0$ uniquement (différents cas pour τ peuvent alors se dégager).

Rassemblant ces cas en une expression, on trouve

$$y(t) = \frac{2}{\omega_f} \sin(\omega_f(t+2)) \mathbb{1}(t+2) - \frac{2}{\omega_f} \sin(\omega_f t) \mathbb{1}(t).$$

Remarque : Une aide graphique afin de déterminer les différents cas et bornes d'intégration était évidemment acceptée.

- (b) Déterminez la fonction de transfert $H(s)$ par la méthode de votre choix.

Solution : La fonction de transfert $H(s)$ peut être déduite à partir des propriétés de la transformée de Laplace et d'une transformée de Laplace élémentaire.

En effet, en partant du signal

$$x(t) = \mathbb{1}(t)$$

dont la transformée de Laplace est donnée par

$$X(s) = \frac{1}{s},$$

on identifie le décalage temporel $x(t - t_0)$ avec $t_0 = -2$ ici. On obtient ainsi, par la propriété de décalage temporel et par linéarité,

$$H(s) = \frac{e^{2s}}{s} - \frac{1}{s}.$$

- (c) Calculez la sortie $Y(s)$ dans le domaine de Laplace.

Solution : La sortie se calcule directement comme

$$Y(s) = H(s)U(s) = \left(\frac{e^{2s}}{s} - \frac{1}{s} \right) \frac{2s}{s^2 + \omega_f^2} = \frac{2e^{2s}}{s^2 + \omega_f^2} - \frac{2}{s^2 + \omega_f^2}$$

où $U(s)$ se déduit immédiatement des tables en utilisant la propriété de linéarité.

- (d) Montrez que la sortie $y(t)$ calculée précédemment correspond bien à la transformée de Laplace inverse de $Y(s)$. Précisez la ROC permettant de faire cette transformée inverse de manière univoque dans ce cas-ci. **Justifiez** chaque étape de votre raisonnement.

Solution : Selon les propriétés de linéarité et de décalage temporel, la ROC de $H(s)$ est identique à celle de la transformée de Laplace de $\mathbb{1}(t)$, elle-même identique à celle de la transformée de Laplace de $\cos(\omega_f t)$, *i.e.* $\text{ROC} = \{s \in \mathbf{C} : \mathcal{R}e(s) > 0\}$. On peut dès lors de manière univoque déterminer $y(t)$, en se basant sur les transformées de Laplace élémentaires et les propriétés des transformées de Laplace.

On a ainsi

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{2e^{2s}}{s^2 + \omega_f^2} \right) = \left[\frac{2}{\omega_f} \sin(\omega_f t) \mathbb{1}(t) \right](t + 2) = \frac{2}{\omega_f} \sin(\omega_f(t + 2)) \mathbb{1}(t + 2),$$

par propriété de décalage temporel et par linéarité, et

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{2}{s^2 + \omega_f^2} \right) = \frac{2}{\omega_f} \sin(\omega_f t) \mathbb{1}(t)$$

par linéarité.

En assemblant ces deux résultats, on retombe sur

$$y(t) = y_1(t) - y_2(t) = \frac{2}{\omega_f} \sin(\omega_f(t + 2)) \mathbb{1}(t + 2) - \frac{2}{\omega_f} \sin(\omega_f t) \mathbb{1}(t).$$

4. *Remarques :*

1. Utilisez les conventions habituelles pour tracer les diagrammes de Bode :

○ diagramme **en amplitude** :

- abscisse : échelle logarithmique, unités naturelles ([rad/sec]),
- ordonnée : échelle naturelle, unités logarithmiques ([dB]).

○ diagramme **en phase** :

- abscisse : échelle logarithmique, unités naturelles ([rad/sec]),
- ordonnée : échelle naturelle, unités naturelles ([rad]).

2. Pour un système d'ordre 2, la présence d'un overshoot doit être détectée et tracée, mais il n'est pas nécessaire de déterminer son amplitude ainsi que la fréquence de résonance.

(a) Soit un système LTI décrit par la fonction de transfert $H_1(s)$ suivante

$$H_1(s) = \frac{s^2}{3(s^2 + 10s + 100)}.$$

(i) Le système causal associé à $H_1(s)$ est-il stable? Donnez la ROC de ce système et justifiez.

Solution : Les pôles de $H_1(s)$ sont donnés par les solutions de

$$s^2 + 10s + 100 = 0,$$

ce qui donne $p_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 400}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{-300}}{2} = -5 \pm j5\sqrt{3}$. Les deux pôles étant tous les deux à partie réelle négative, la ROC associée au système causal, donnée par $\text{ROC} = \{s \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(s) > \max(\mathcal{R}e(p_1), \mathcal{R}e(p_2))\}$, contient l'axe imaginaire et le système causal est donc stable.

- (ii) Si cela a du sens, tracez les diagrammes de Bode en amplitude et en phase associés à $H_1(s)$.
Sinon, justifiez pourquoi ces diagrammes n'ont pas de sens.

Solution : Le système étant stable (voir point précédent), on peut étudier le comportement fréquentiel du système causal associé à $H_1(s)$ en étudiant les diagrammes en amplitude et en phase de $H_1(j\omega)$.

On peut ici décomposer $H_1(s)$ comme

$$H_1(s) = H_{1,a}(s)H_{1,b}(s) = \frac{s^2}{3} \frac{1}{s^2 + 10s + 100}.$$

On a ainsi

$$20 \log(|H_{1,a}(j\omega)|) = 20 \log(1/3) + 20 \log(\omega^2) = 20 \log(1/3) + 40 \log(\omega)$$

et

$$\angle H_{1,a} = \angle(s^2/3) = \angle s^2 = \angle s + \angle s = \pi/2 + \pi/2 = \pi.$$

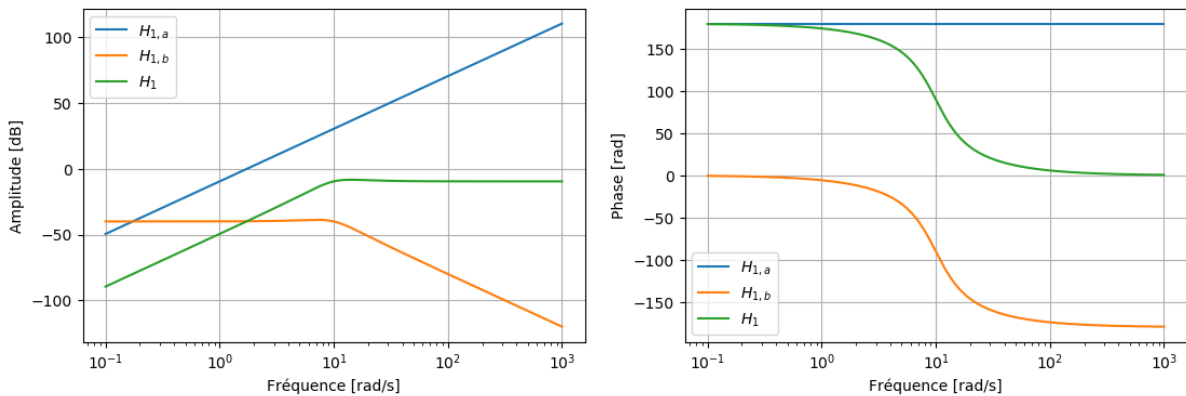
On reconnaît pour $H_{1,b}(s)$ la forme d'un système de second ordre et on identifie

$$H_{1,b}(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

avec $K = 10^{-2}$, $\omega_0 = 10$ et $\xi = 0.5$. Le facteur d'amortissement ξ étant plus petit que $\sqrt{2}/2$, il y aura présence d'un overshoot, et donc d'oscillations pour la réponse impulsionnelle correspondante.

Les diagrammes de Bode sont donnés aux figures 2a et 2b.

Attention : les diagrammes de Bode étaient souvent incomplets (labels d'axes, légende, graduation, ...) ou illisibles (attention au soin).



(a) $|H_1(j\omega)|$.

(b) $\angle H_1(j\omega)$.

FIGURE 2 – Diagrammes de Bode pour $H_1(s)$.

(b) Soit un second système dont la relation entrée-sortie est donnée par

$$\ddot{y} + 2\omega_h \dot{y} + \omega_h^2 y = 0.1\omega_h u,$$

où $u(t)$ et $y(t)$ représentent les signaux d'entrée et de sortie, respectivement, et $\omega_h > 10$ représente une pulsation indéfinie.

(i) Déterminez la fonction de transfert $H_2(s)$ de ce système en fonction de ω_h .

Solution : L'équation entrée-sortie devient, dans le domaine de laplace,

$$Y(s)(s^2 + 2\omega_h s + \omega_h^2) = U(s)(0.1\omega_h),$$

et on a directement que

$$H_2(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0.1\omega_h}{s^2 + 2\omega_h s + \omega_h^2}.$$

(ii) Tracez le diagramme de Bode en **amplitude** du système décrit par la fonction de transfert $H_{12}(s) = H_1(s)H_2(s)$.

Solution : À nouveau, on reconnaît pour $H_2(s)$ la forme d'un système de second ordre et on identifie

$$H_2(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

avec $K = 0.1/\omega_h$, $\omega_0 = \omega_h$ et $\xi = 1$. Comme $\xi > \sqrt{2}/2$ ici, il n'y aura donc pas d'overshoot. Le diagramme de Bode en amplitude de $H_{12}(s)$ est donné à la figure 3, pour $\omega_h = 10^2$ rad/s (choix arbitraire).

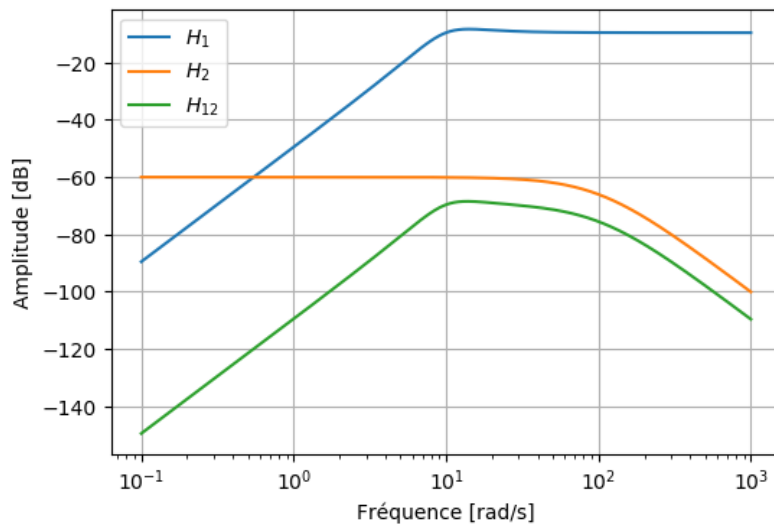


FIGURE 3 – $|H_1(j\omega)|$, $|H_2(j\omega)|$ et $|H_{12}(j\omega)|$.

- (iii) Sur base du diagramme de Bode en amplitude tracé au point précédent, quel type de filtre le système décrit par H_{12} représente-t-il ? Que représente ω_h ?

Solution : Un filtre passe-bande de fréquence de coupure haute ω_h .

Extra page 1. Keep calm.

Extra page 2. Don't panic.

Extra page 3. Everything's gonna be alright.