

# SYST0002-2 Examen

Guillaume Drion, Alessio Franci, Caroline Dejace, Antoine Debor

20 juin 2025

Cet examen comporte 3 questions et dure 3 heures. Cet examen se déroule à livre fermé. Une calculatrice *graphique* n'est **pas** autorisée. Aucun ordinateur, tablette, téléphone portable ou montre connectée n'est autorisé.e.

Justifiez vos réponses en montrant vos développements et essayez de vérifier si vos réponses ont du sens. Les réponses doivent être entièrement simplifiées sauf indication contraire.

Répondez directement sous les questions. Les verso et les pages supplémentaires peuvent être utilisés comme brouillon ou comme espace supplémentaire pour répondre aux questions. Si vous souhaitez que le travail effectué dans ces espaces supplémentaires soit corrigé, indiquez où chercher **en gros caractères** dans l'espace initialement prévu pour la réponse.

Inscrivez votre nom, prénom et identifiant ULiège sur la première page. Inscrivez uniquement votre identifiant ULiège sur toutes les autres pages.

A la fin de l'épreuve, rendez **toutes (16) les pages** du questionnaire **triées dans l'ordre indiqué en bas de page**.

Bonne chance!

Prénom et nom (en majuscules). N'écrivez pas en dehors du cadre.

ULiège ID

(lettre "s" suivie du nombre à 6 chiffres indiqué sur votre carte d'étudiant).

## 1. Théorie

(a) Étant donné un champ vectoriel avec entrée

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

expliquez :

- Le concept de linéarisation de (1) et en particulier :
  - Où cela est raisonnable de linéariser le système (1).
  - Quelle matrice  $A$  définit la linéarisation de (1).
  - Comment le spectre (valeur(s) et vecteur(s) propre(s)) de la matrice  $A$  détermine la dynamique du système.
- Ce qu'on perd en linéarisant un système non-linéaire. Donnez un exemple d'un système pour lequel la linéarisation n'est pas informative.

*Solution* : Éléments de réponse attendus :

- savoir que la linéarisation émerge naturellement autour de points d'équilibre
- expliquer la notion de matrice jacobienne d'un système
- expliquer la connexion entre vecteurs propres et dynamique du système
- expliquer la connexion entre valeurs propres du Jacobien et stabilité du système linéarisé
- expliquer la notion de localité de l'approximation
- expliquer la relation entre points d'équilibre singuliers et linéarisation non-informative (e.g.  $\dot{x} = x^2$ ).

- (b) Expliquez brièvement le concept de décomposition d'un signal en séries de Fourier. A quel type de signaux cette décomposition s'applique-t-elle? Donnez un exemple d'utilisation de la décomposition en séries de Fourier.

*Solution* : Éléments de réponse attendus :

- expliquer l'idée de décomposition d'un signal périodique en une combinaison linéaire pondérée d'exponentielles complexes à la fréquence fondamentale du signal et ses harmoniques (en plus de la composante DC, *i.e.* à la fréquence nulle).

- (c) Quelles sont les différences principales entre séries de Fourier, transformée de Fourier et transformée de Laplace en termes de types de signaux ou systèmes auxquels elles s'appliquent, les signaux de base qu'elles utilisent et leurs propriétés de convergence.

*Solution* : Éléments de réponse attendus :

- expliquer les différents domaines d'application (signaux périodiques/apériodiques)
- expliquer que les séries et la transformée de Fourier utilisent l'exponentielle complexe avec  $s = j\omega$ , la transformée de Laplace avec  $s = \sigma + j\omega$
- expliquer que les séries et la transformée de Fourier convergent ou non alors que la transformée de Laplace a une ROC,
- expliquer que la transformée de Laplace s'applique à la réponse impulsionnelle des systèmes causaux stables et instables (et possiblement discuter des autres cas de causalité), la transformée de Fourier uniquement les systèmes causaux stables.

- (d) Le schéma suivant représente la décomposition d'un enregistrement électroencéphalogramme (EEG) en signaux appartenant à des bandes de fréquences distinctes : Delta (0-4 Hz), Theta (4-8 Hz), Alpha (8-12 Hz), Beta (12-30 Hz) et Gamma (> 30 Hz).

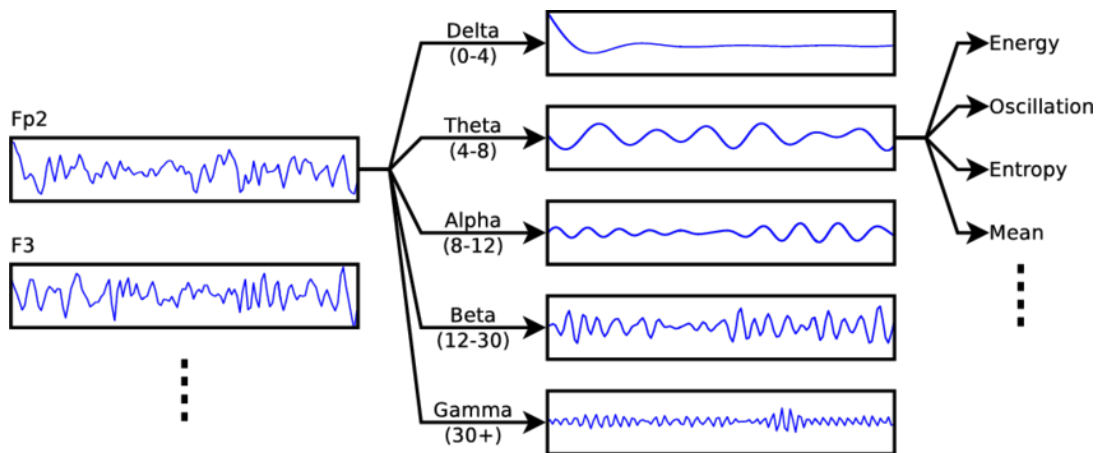


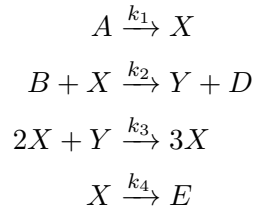
FIGURE 1 – Décomposition d'un enregistrement EEG en différentes bandes de fréquences.

En vous aidant de schémas simplifiés dans le domaine fréquentiel, expliquez comment cette décomposition peut être réalisée. On attend des spectres fréquentiels schématisés pour le signal de départ, les opérations qui permettent de décomposer le signal en différentes bandes de fréquences, ainsi que les signaux correspondant à chaque bande de fréquence. La forme quantitative des spectres fréquentiels n'a pas d'importance.

*Solution* : Éléments de réponse attendus :

- dessiner un spectre schématisé du signal d'entrée avec mise en évidence des différentes bandes de fréquences (Delta, Theta, etc.), et expliquer de quoi il se compose
- dessiner les spectres schématisés des différents filtres passe-bande à utiliser et expliquer leur utilisation dans l'extraction des contenus fréquentiels des différentes bandes
- dessiner un spectre schématisé d'un (ou plusieurs) des signaux de sortie, et expliquer de quoi il se compose.

2. Le Brusselator (oui, oui, vous avez bien lu) n'est pas le nom d'un super-héros Marvel ou DC que vous ne connaissiez pas, mais le nom d'un modèle mathématique qui décrit un système chimique autocatalytique qui convertit un réactif  $A$  en un produit final  $E$  via 4 étapes et 4 espèces intermédiaires ( $B, X, Y, D$ ) :



Seules les étapes 2 et 3 nous intéressent ici puisqu'elles illustrent les réactions multi-moléculaires et autocatalytiques. En utilisant la loi d'action des masses, le modèle dynamique (causal) du Brusselator peut être dérivé :

$$\dot{x}(t) = a + x^2(t)y(t) - (b + 1)x(t) + u_x(t) \quad (2)$$

$$\dot{y}(t) = bx(t) - x^2(t)y(t) + u_y(t) \quad (3)$$

$$s = x \quad (4)$$

où  $x(t), y(t)$  représentent les concentrations ([mole/L]) des réactifs de même nom,  $a$  et  $b > 0$  sont des paramètres, et  $u_x(t)$  et  $u_y(t)$  ([moles/L]) sont des concentrations externes ajoutées au cours du temps par l'expérimentateur pour réguler la quantité de produit final. La sortie du Brusselator est la concentration de réactif  $X$  obtenu.

- (a) Le Brusselator est-il linéaire ou non-linéaire ? Justifiez.

*Solution* : Non-linéaire à cause de  $x^2$  et du produit de  $x^2y$ .

- (b) Le Brusselator est-il temps-variant ou temps-invariant ? Justifiez.

*Solution* : Temps-invariant car tous les coefficients devant les signaux sont indépendants du temps (i.e. scalaire) et les signaux ne dépendent que de l'instant  $t$  (i.e. pas de transformations combinées).

- (c) Déterminez **tous** les points d'équilibre (PF) du Brusselator pour des entrées nulles. Justifiez.

*Solution* : Les PFs sont les intersections des nullclines, i.e.  $\dot{x} = \dot{y} = 0$  (les points où le système est stationnaire). On a alors

$$\dot{y} = 0 = x(-xy + b) \leftrightarrow x = 0 \quad \text{OU} \quad y = \frac{b}{x}$$

$x = 0$  : Si  $x = 0$  alors  $\dot{x} = 0 = x^2y - (b + 1)x + a \leftrightarrow a = 0$ , ce qui n'est pas possible puisque  $a > 0$  (voir énoncé).

$y = \frac{b}{x}$  : Si  $y = \frac{b}{x}$  alors  $\dot{x} = 0 = x^2y - (b + 1)x + a = bx - bx - x + a \leftrightarrow x = a \rightarrow y = \frac{b}{a}$ .

Le seul PF possible est donc  $(x, y) = (a, \frac{b}{a})$

- (d) Déterminez la **stabilité** ou une condition nécessaire et suffisante de stabilité pour tous vos PF trouvés au point précédent. Justifiez.

*Solution :* Pour déterminer la stabilité de chaque PF, il faut 1) calculer la matrice jacobienne du Brusselator, 2) évaluer cette matrice en chaque PF, 3) calculer ses valeurs propres afin de déterminer la stabilité du PF.

1. Matrice jacobienne :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy - (b+1) & x^2 \\ b - 2xy & -x^2 \end{pmatrix}.$$

2. Evaluation au seul PF trouvé :

$$J\left(a, \frac{b}{a}\right) = \begin{pmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{pmatrix}.$$

3. Calcul des valeurs propres : les valeurs propres  $\lambda$  associées à un PF sont les solutions du polynôme caractéristique de la matrice jacobienne évaluée en ce PF, *i.e.* les solutions de  $\det(J_{PF} - \lambda I) = 0$  (avec  $I$  la matrice identité en 2D). De manière similaire, les valeurs propres associées à un PF peuvent être déterminées via la trace  $\tau$  et le déterminant  $\Delta$  de la matrice jacobienne évaluée en ce PF. On trouve alors :

$$\begin{aligned} \tau &= -a^2 + b - 1, & \Delta &= a^2 \\ \Rightarrow \lambda_{1,2} &= \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} = \frac{-(a^2 - b + 1) \pm \sqrt{(a^2 - b + 1)^2 - 4a^2}}{2}. \end{aligned}$$

Sans connaître les valeurs exactes de  $a$  et  $b$ , il est difficile de conclure sur la nature exacte (noeud, spirale, etc) du PF. Cependant, la stabilité d'un PF ne dépend que de la partie réelle de ses valeurs propres. Ainsi, une condition nécessaire et suffisante pour avoir un PF stable est

$$a^2 - b + 1 > 0 \leftrightarrow 0 < b < a^2 + 1.$$

En effet, si  $(a^2 - b + 1)^2 - 4a^2 < 0$ , les VaP sont complexes conjuguées et la stabilité ne dépend que du signe de  $a^2 - b + 1$  :  $> 0 \rightarrow$  stable,  $< 0 \rightarrow$  instable. Si  $(a^2 - b + 1)^2 - 4a^2 = 0$ , le PF sera stable (resp. instable) si  $a^2 - b + 1 > 0$  (resp.  $< 0$ ). Si  $(a^2 - b + 1)^2 - 4a^2 > 0$ , les 2 VaP seront réelles et auront toutes les 2 leur signe opposé à celui de  $a^2 - b + 1$  (puisqu'on ajoute/retire quelque chose qui est plus petit que  $a^2 - b + 1$ ) : VaP  $< 0$  (resp.  $> 0$ ) ssi  $a^2 - b + 1 > 0$  (resp.  $a^2 - b + 1 < 0$ ).

En conclusion, la seule condition nécessaire et suffisante pour avoir un PF stable est  $0 < b < a^2 + 1$ .

- (e) Donnez une représentation d'état  $A, B, C, D$  pour chaque PF **stable** calculé précédemment. Indiquez explicitement quelles sont vos entrées, sorties et variables d'état. Attention aux notations ! Vous pouvez utiliser la méthode de votre choix mais justifiez votre raisonnement et vos calculs. Identifiez de manière explicite vos matrices.

*Solution* : Entrées :  $\delta u = [\delta u_x \quad \delta u_y]^T$ , petites perturbations dans les concentrations externes ajoutées.

Sortie :  $\delta s = \delta x = \delta v_1$ , petite variation de la concentration du réactif  $X$  autour de la valeur d'équilibre  $a$ .

Variables d'état :  $\delta v = [\delta v_1 \quad \delta v_2]^T = [\delta x \quad \delta y]^T$ , petites variations dans les concentrations des réactifs  $X$  et  $Y$  autour des concentrations d'équilibre  $(x, y) = (a, \frac{b}{a})$ .

En utilisant la méthode des dérivées :

$$\begin{cases} (\dot{\delta v}) &= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix}}_A \Big|_{(x,y)=(a, \frac{b}{a})} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial u_x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial u_y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial u_x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial u_y} \end{pmatrix}}_B \Big|_{(u_x^*, u_y^*)=(0,0)} \begin{pmatrix} \delta u_x \\ \delta u_y \end{pmatrix} \\ (\dot{\delta s}) &= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{pmatrix}}_C \Big|_{(x,y)=(a, \frac{b}{a})} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial u_x} & \frac{\partial s}{\partial u_y} \end{pmatrix}}_D \Big|_{(u_x^*, u_y^*)=(0,0)} \begin{pmatrix} \delta u_x \\ \delta u_y \end{pmatrix}. \end{cases}$$

On trouve alors :

$$A = \begin{pmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 0), \quad D = (0 \quad 0).$$

À noter que le PF sera stable ssi  $0 < b < a^2 + 1$ .

- (f) Donnez la/les équation(s) entrée(s)-sortie(s) via la méthode de votre choix. Justifiez.

*Solution* : Dans le domaine de Laplace, on sait que  $S(s) = H(s)U(s)$  avec  $S(s)$ , la sortie,  $U(s)$ , les entrées, et  $H(s)$ , la fonction de transfert. A noter que  $H(s)$  aura  $1 \times 2$  comme dimensions étant donné la nature MISO du système. Ayant les matrices  $A, B, C, D$  du système, on trouve alors :

$$\begin{aligned} H(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} s - (b-1) & -a^2 \\ b & s + a^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 0) \\ &= \frac{1}{s^2 + (a^2 - b + 1)s + a^2} (1 \quad 0) \begin{pmatrix} s + a^2 & a^2 \\ -b & s - (b-1) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + (a^2 - b + 1)s + a^2} (s + a^2 \quad a^2) = \frac{S(s)}{U(s)}. \end{aligned}$$

En considérant  $U_x(s)$  et  $U_y(s)$  comme étant les transformées de Laplace de  $\delta u_x(t)$  et  $\delta u_y(t)$  respectivement, on a :

$$(s^2 + (a^2 - b + 1)s + a^2)S(s) = (s + a^2 \quad a^2) \begin{pmatrix} U_x(s) \\ U_y(s) \end{pmatrix}.$$

Par les propriétés de Laplace de linéarité et de dérivation temporelle, on trouve finalement :

$$(\ddot{\delta x}) + (a^2 - b + 1)(\dot{\delta x}) + a^2\delta x = (\delta \dot{u}_x) + a^2(\delta u_x + \delta u_y).$$

- (g) Pour cette sous-question uniquement, supposons que  $u_x = u_y$ . Déterminez l'ensemble **minimal** de valeurs possibles pour les paramètres  $a$  et  $b$  pour que la réponse impulsionnelle du système soit stable et monotone. Justifiez!

N.B. : si  $z > 1$  :  $\sqrt{z-1} < 1 + \sqrt{z}$ .

*Solution* : Si  $u_x = u_y$ , alors notre fonction de transfert (voir point (f)) devient  $H(s) = \frac{s+2a^2}{s^2+(a^2-b+1)s+a^2}$ . Puisque le système est causal, sa ROC sera un demi-plan ouvert à droite et limité à gauche par la plus grande partie réelle des pôles de  $H(s)$  (= solutions de  $s^2 + (a^2 - b + 1)s + a^2 = 0$ , i.e.  $s_{1,2} = \frac{-(a^2-b+1) \pm \sqrt{(a^2-b+1)^2 - 4a^2}}{2}$ ).

- Stable et monotone : Pour que la réponse impulsionnelle soit stable et monotone, il faut que i) la ROC inclue l'axe imaginaire (stabilité) et ii) les 2 pôles soient réels (monotonie). Cherchons donc l'ensemble minimal de conditions pour avoir des pôles réels et négatifs. Sur base de l'expression des pôles, il faut donc

$$\gamma = a^2 - b + 1 > 0 \quad \text{ET} \quad \rho = (a^2 - b + 1)^2 - 4a^2 > 0.$$

Analysons la première inégalité. On distingue les 2 cas suivants :

$0 < b < 1$	$b > 1$			
$a^2 - b + 1 > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}_0^+$	$a$	$-\sqrt{b-1}$	$0$	$\sqrt{b-1}$
	$a^2 - b + 1$	/	/	/
		/	/	-
			0	+

Analysons la 2ème inégalité et rassemblons les résultats :

$0 < b < 1$							$b > 1$								
$a$	$0$	$1 - \sqrt{b}$	$1 + \sqrt{b}$	$a$	$0$	$\sqrt{b-1}$	$1 + \sqrt{b}$	$a$	$0$	$\sqrt{b-1}$	$1 + \sqrt{b}$				
$\gamma$	/	/	+	+	+	+	+	$\gamma$	/	/	-	0	+	+	+
$\rho$	/	/	+	0	-	0	+	$\rho$	/	/	-	-	-	0	+
	/	/	✓	✗	✗	✗	✓		/	/	✗	✗	✗	✗	✓

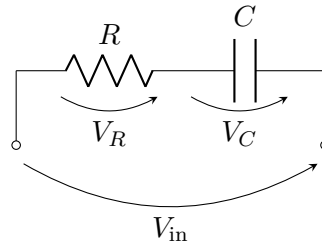
En conclusion, l'ensemble de valeurs possibles pour les paramètres est défini par  $\{(a, b) \in \mathbb{R}_0^+ \mid a > 1 + \sqrt{b} \vee (b < 1 \wedge a < 1 - \sqrt{b})\}$ .

3. *Remarques* :

1. Utilisez les conventions habituelles pour tracer les diagrammes de Bode :
  - diagramme **en amplitude** :
    - abscisse : échelle logarithmique, unités naturelles ([rad/sec]),
    - ordonnée : échelle naturelle, unités logarithmiques ([dB]).
  - diagramme **en phase** :
    - abscisse : échelle logarithmique, unités naturelles ([rad/sec]),
    - ordonnée : échelle naturelle, unités naturelles ([rad]).
2. Pour un système d'ordre 2, la présence d'un overshoot doit être détectée et tracée, mais il n'est pas nécessaire de déterminer son amplitude ainsi que la fréquence de résonance.

Guillaume est retombé sur son vieux lecteur-enregistreur de cassettes dans son garage. Nostalgique de ses années adolescentes, il décide d'utiliser ses connaissances en signaux et systèmes pour réparer cet objet de collection.

- (a) Afin d'améliorer la qualité de l'enregistrement, il désire ajouter un filtre passe-bande de fréquences de coupure  $f_{basse} = 88$  Hz et  $f_{haute} = 190$  Hz. Pour ce faire, il décide d'utiliser un montage RC série dont le schéma est donné par



où l'entrée est la tension  $V_{in}$ . Pour rappel, les équations gouvernant ce circuit sont données par

$$V_{in} = V_C + V_R \quad (\text{Loi des mailles})$$

$$\frac{V_R}{R} = C \frac{dV_C}{dt} \quad (\text{Loi des noeuds}).$$

Il sait que ce montage peut être utilisé comme un filtre passe-bas ou comme un filtre passe-haut en fonction de si la tension de sortie est mesurée aux bornes de la résistance ou du condensateur, mais il ne se rappelle plus de la relation correcte.

1. Donnez la fonction de transfert du système dans les deux cas. Identifiez quel cas correspond à un filtre passe-bas et quel cas correspond à un filtre passe-haut. Justifiez.
2. Expliquez comment combiner ces deux filtres afin d'obtenir un filtre passe-bande. Donnez la fonction de transfert  $H_1(s)$  du filtre passe-bande ainsi obtenu, ainsi que la ROC associée. Justifiez. Le système est-il stable? Justifiez.
3. Guillaume a à sa disposition les résistances et condensateurs suivants :

Résistance	Condensateur
2 kΩ	1 μF
1.8 kΩ	3 pF
1.2 kΩ	0.7 μF

Déterminez quels couples de composants ( $R, C$ ) choisir parmi ceux proposés, pour chacun des deux montages, afin d'obtenir le filtre passe-bande décrit plus haut.

4. Tracez le diagramme de Bode en amplitude du filtre passe-bande ainsi construit. Justifiez l'existence de ce diagramme.  
NB : lors de l'examen, deux résistances étaient exprimées en  $\Omega$  et non en  $k\Omega$ . Les étudiants ayant malgré tout montré un raisonnement correct (même s'il n'aboutissait pas totalement) ont donc obtenu les points de la question, les valeurs proposées étant incorrectes.

*Solution :*

1. Cas 1 :  $y = V_C$

La relation entrée-sortie est donnée par  $R_C C_C \dot{y} + y = u$  et la fonction de transfert est donc donnée par

$$H_C(s) = \frac{1}{1 + R_C C_C s},$$

où  $(R_C, C_C)$  est le couple de composants de ce premier montage. La présence d'un pôle en  $s = -1/(R_C C_C)$  indique que ce premier montage correspond à un filtre passe-bas.

Cas 2 :  $y = V_R$

La relation entrée-sortie est donnée par  $R_R C_R \dot{y} + y = R_R C_R \dot{u}$  et la fonction de transfert est donc donnée par

$$H_R(s) = \frac{R_R C_R s}{1 + R_R C_R s},$$

où  $(R_R, C_R)$  est le couple de composants de ce second montage. La présence d'un zéro à la fréquence nulle et d'un pôle en  $s = -1/(R_R C_R)$  indique que ce second montage correspond à un filtre passe-haut.

2. Il suffit de combiner le filtre passe-haut et le filtre passe-bas en série, de manière à ce que la fréquence de coupure du passe-haut soit plus basse que celle du passe-bas. La fonction de transfert du système total est donnée par

$$H_1(s) = H_C(s)H_R(s) = \frac{R_R C_R s}{(1 + R_C C_C s)(1 + R_R C_R s)}.$$

Le système étant un système physique, il est causal et sa ROC est donnée par le demi-plan à droite du pôle possédant la partie réelle la plus grande. Les pôles sont ici donnés par  $p_{1,2} = -1/(R_{R,C} C_{R,C})$ , donc  $\text{ROC} = \{s \in \mathcal{C} : \mathcal{R}e(s) > -1/\max(R_R C_R, R_C C_C)\}$ . La ROC contient l'axe imaginaire pour tous les couples  $(R, C)$  disponibles et le système est donc stable.

3. Les fréquences de coupure correspondent aux position des pôles sur le diagramme de Bode. On a donc, pour  $s = j\omega$ , une fréquence de coupure basse  $f_{basse} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R_R C_R} = 88 \text{ Hz}$  et une fréquence de coupure haute  $f_{haute} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R_C C_C} = 190 \text{ Hz}$ . Les deux couples de composants disponibles sont donc donnés par  $(R_R, C_R) = (1.8k, 1\mu)$  et  $(R_C, C_C) = (1.2k, 0.7\mu)$ , donnant respectivement des fréquences de coupures égales à 88.42 Hz et 189.47 Hz.
4. La ROC du système contenant l'axe imaginaire, la transformée de Fourier existe et le diagramme de Bode, qui représente la réponse fréquentielle, peut être tracé. Le diagramme en amplitude de  $H_1(s)$  est donné à la figure 2.

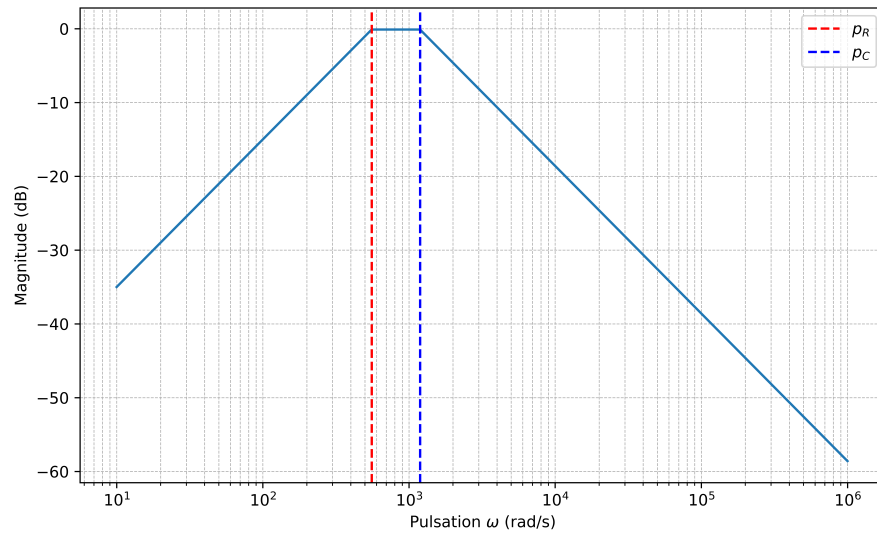


FIGURE 2 – Diagramme de Bode en amplitude de  $H_1(s)$ , où  $p_R$  et  $p_C$  dénotent les pôles de  $H_R(s)$  et de  $H_C(s)$ , respectivement. Les pentes de part et d'autre du plateau sont respectivement de +20 dB/dec et -20 dB/dec.

- (b) Le fabricant de l'enregistreur ne donne pas d'information sur le circuit utilisé pour traiter le signal avant de l'enregistrer sur bande. Curieux, Guillaume décide d'identifier lui-même le comportement de ce bloc. Il applique un signal d'entrée  $u(t) = \delta(t)$ , où  $\delta$  représente la fonction delta de Dirac, et enregistre un signal de sortie

$$y(t) = \frac{5e^{-t}}{\sqrt{0.96}} \sin\left(5\sqrt{0.96}t\right) \mathbb{1}(t).$$

Donnez la fonction de transfert  $H_2(s)$  de ce circuit. Le diagramme de Bode correspondant présenterait-il un *overshoot*? Justifiez.

*Solution :* L'entrée  $u(t)$  étant une impulsion de Dirac, la sortie  $y(t)$  représente la réponse impulsionnelle du système, que nous appelons  $h_2(t)$ . Dès lors, la fonction de transfert  $H_2(s)$  de ce système, qui correspond à la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle  $h_2(t)$ , est donnée par la transformée de Laplace de la sortie  $y(t)$ , *i.e.*  $H_2(s) = \mathcal{L}(h_2(t))(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$ .

En partant de la transformée de Laplace élémentaire de  $\sin(\omega_0 t)\mathbb{1}(t)$ , en utilisant les propriétés de décalage fréquentiel et de linéarité, et par identification, on trouve

$$H_2(s) = \frac{5}{\sqrt{0.96}} \frac{5\sqrt{0.96}}{s^2 + 2s + 1 + 5^2 \cdot 0.96} = \frac{25}{s^2 + 2s + 25}$$

que l'on identifie comme un système de second ordre de forme canonique

$$H_2(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

avec  $K = 1, \omega_0 = 5, \zeta = 0.2$ .

Le diagramme de Bode présenterait bien un *overshoot* car  $\zeta = 0.2 < \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Ceci est cohérent avec le caractère oscillatoire de la réponse impulsionnelle  $y(t)$ .

- (c) Tracez le diagramme de Bode en amplitude du système total (de fonction de transfert  $H_3(s)$ ) composé de la mise en série de  $H_1(s)$  et  $H_2(s)$ . Considérez à nouveau les couples  $(R, C)$  identifiés plus haut.

*Solution :* Le diagramme de Bode en amplitude de  $H_2(s)$  est donné à la figure 3 (haut) où l'*overshoot* est représenté de manière schématique. Le diagramme de Bode en amplitude de la mise en série de  $H_1(s)$  et  $H_2(s)$  est donné à la figure 3 (bas).

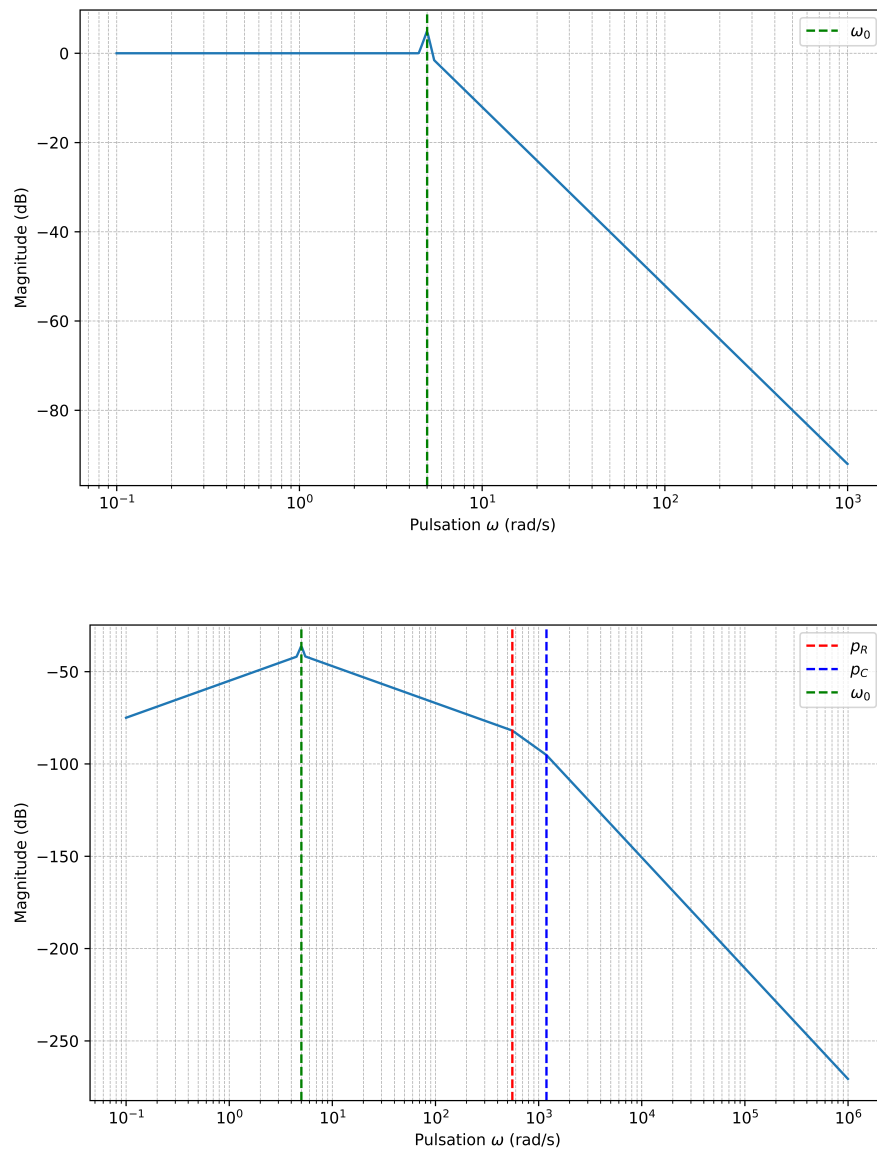


FIGURE 3 – Diagrammes de Bode en amplitude pour  $H_2(s)$  (haut) et  $H_3(s)$  (bas). Pour  $H_3(s)$ , les pentes pour les différents segments sont respectivement de +20 dB/dec, -20 dB/dec, -40 dB/dec et -60 dB/dec.

**Extra page 1.** Keep calm.

**Extra page 2.** Don't panic.

**Extra page 3.** Everything's gonna be alright.