

SYST0002-1 Exam

Guillaume Drion, Alessio Franci, Julien Brandoit and Julien Vanderheyden

June 19, 2026

Durée : 4 heures.

Cet examen est à livre fermé et sans notes de cours. Les calculatrices, ordinateurs et téléphones portables sont interdits. Justifiez vos réponses et essayez de vérifier si elles sont cohérentes. Les réponses doivent être exactes, sauf si une approximation est demandée, et entièrement simplifiées sauf indication contraire.

L'examen comporte 5 questions. La dernière page contient des tableaux de transformées de Laplace et de Fourier usuelles. Les trois pages précédentes peuvent être utilisées comme brouillon ou espace supplémentaire. Si vous souhaitez que du travail effectué sur ces pages ou au verso des pages soit corrigé, indiquez clairement où le trouver **en grosses lettres et entouré d'un cadre**, sur la page contenant la question.

Inscrivez votre prénom, votre nom de famille et votre identifiant ULiège sur la première page. N'inscrivez que votre identifiant ULiège sur toutes les autres pages.

Avant de remettre votre examen, **classez toutes les pages selon les numéros figurant en bas de page** (même si vous avez utilisé des pages supplémentaires, laissez-les à la fin).

Bonne chance !

Prénom et nom de famille (en lettres majuscules). N'écrivez pas à l'extérieur du cadre.

Identifiant ULiège (lettre "s" suivie d'un numéro à 6 ou 7 chiffres figurant sur votre carte d'étudiant).

1. Julien est passionné par deux sujets qui, à première vue, semblent incompatibles: la biologie et la modélisation mathématique. Afin de réconcilier ses deux passions, il décide de modéliser la dynamique entre deux populations animales x et y en compétition dans un milieu à ressources limitées. Il construit son modèle comme suit :

- Chaque population d'animaux se reproduit et grandit à un rythme proportionnel à sa taille. Il ajoute donc un terme directement proportionnel à son modèle : $\dot{x} = x$ et $\dot{y} = y$.
- Les ressources étant limitées, les populations ne peuvent pas grandir à l'infini. Il décide donc d'ajouter un terme limitant proportionnel au nombre de paires d'individus possiblement en compétition au sein d'une même espèce, à savoir un terme quadratique : $\dot{x} = x - x^2$ et $\dot{y} = y - y^2$.
- Afin d'ajouter la compétition entre les deux espèces, il introduit les paramètres α et β , modélisant l'influence que chaque espèce a sur l'autre : plus leur valeur est élevée, plus la présence de l'autre espèce réduit la croissance de la population considérée. À l'inverse, des valeurs faibles traduisent une compétition limitée et une utilisation relativement indépendante des ressources disponibles. Les équations deviennent alors : $\dot{x} = x - x^2 - \alpha xy$ et $\dot{y} = y - y^2 - \beta xy$.
- Finalement, afin de pimenter un peu plus les choses, il décide que sa population x sera différente : ce type d'espèce nécessite moins de ressources pour survivre mais est par contre plus sujette à de graves maladies lorsque la population grandit. Il décide ainsi de remplacer le terme $-x^2$ par $-x^3$, afin de pénaliser les grandes populations.

Le modèle final est alors le suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x \cdot (1 - x^2 - \alpha y) \\ \dot{y} &= y \cdot (1 - y - \beta x)\end{aligned}$$

- (a) Julien aimerait analyser la dynamique de ce système pour $\alpha = \frac{7}{8}$ et $\beta = \frac{2}{7}$.
- i. Ce modèle est-il linéaire ou non linéaire ? Dans le dernier cas, citez toutes les sources de non-linéarités.

Solution: Non-linéaire. Les non-linéarités sont les termes croisés $-\alpha xy$ et $-\beta xy$ ainsi que les termes quadratiques et cubiques $-y^2$ et $-x^3$.

- ii. Les variables x et y représentent des tailles de populations. Donnez leurs domaines et images.

Solution: x et y étant des variables proportionnelles à des tailles de population, elles ne peuvent pas prendre de valeurs négatives. On a donc : $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ et $y : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$.

iii. Donnez l'(les) expression(s) de la(des) nullcline(s).

Solution: $\dot{x} = 0$ donne comme solutions deux nullclines : la droite verticale $x = 0$ et la parabole $y = \frac{1-x^2}{\alpha}$. $\dot{y} = 0$ donne également deux solutions : la droite horizontale $y = 0$ et la droite oblique $y = 1 - \beta x$.

iv. Identifiez tous les points fixes du système. Fournissez une interprétation physique : à quelles situations ces points fixes correspondent-ils?

Solution: Résoudre le système $\dot{x} = 0 = \dot{y}$ mène à 4 points fixes. Les trois premiers points fixes sont sur les axes : (0,0), (1,0) et (0,1). Le dernier correspond à l'intersection entre la parabole et la droite :

$$\begin{aligned}\frac{1-x^2}{\alpha} &= 1 - \beta x \\ x^2 - \alpha\beta x + (\alpha - 1) &= 0 \\ x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} &= 0\end{aligned}$$

On identifie ensuite le déterminant $\Delta = \sqrt{\frac{1}{16} + 4 \cdot \frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$. Les deux racines possibles sont alors $x_{\pm} = \frac{\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}}{2}$. $x_- = -\frac{1}{4}$ étant négatif, il est en dehors de l'ensemble image considéré et est à rejeter. $x_+ = \frac{1}{2}$ est par contre valide. La valeur de y correspondante est $y = 1 - \beta x_+ = \frac{6}{7}$. On a donc comme dernier point fixes : $(\frac{1}{2}, \frac{6}{7})$.

Ces PFs font sens d'un point de vue physique : (0,0) correspond à l'absence totale des deux espèces, (1,0) et (0,1) représentent les scénarios où seulement une espèce survit et le dernier point fixe $(\frac{1}{2}, \frac{6}{7})$ correspond au cas où les deux espèces co-existent ensemble. Il est tout à fait normal que la population y ait une valeur $\frac{6}{7}$ plus élevée que les $\frac{1}{2}$ de la population x , étant donnée que $\alpha > \beta$: l'espèce y a donc une influence plus forte sur la population x .

- v. Identifiez la nature de ces points fixes. Leur stabilité a-t-elle du sens physiquement? Comment l'interprétez-vous?

Il est utile dans cet exercice de connaître le résultat numérique suivant : $\frac{19}{14} > \frac{9}{7}$.

Solution:

La nature des PF est déterminée par le signe des valeurs propres de la matrice Jacobienne évaluée au point fixe. Cette matrice est calculée comme suit :

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \alpha y - 3x^2 & -\alpha x \\ -\beta y & 1 - 2y - \beta x \end{bmatrix}$$

On peut ensuite évaluer cette matrice aux différents points fixes.

- $J(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Cette matrice étant diagonale, on identifie directement ses valeurs propres $\lambda_{1,2} = 1 > 0 \rightarrow$ ce point fixe correspond à un **équilibre instable** (VPs positives).
- $J(1, 0) = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{7}{8} \\ 0 & \frac{5}{7} \end{bmatrix}$. Cette matrice étant triangulaire, on identifie directement ses valeurs propres $\lambda_1 = -2 < 0$ et $\lambda_2 = \frac{5}{7} > 0 \rightarrow$ ce point fixe correspond à un **point de selle** (VPs de signes opposés).
- $J(0, 1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{2}{7} & -1 \end{bmatrix}$. De manière similaire au point précédent, on identifie $\lambda_1 = \frac{1}{8} > 0$ et $\lambda_2 = -1 < 0 \rightarrow$ ce point fixe correspond à un **point de selle**.
- $J(\frac{1}{2}, \frac{6}{7}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{7}{16} \\ -\frac{12}{49} & -\frac{6}{7} \end{bmatrix}$. Afin d'identifier les VPs de cette matrice, on dérive le polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) \cdot \left(-\frac{6}{7} - \lambda\right) - \left(-\frac{12}{49}\right)\left(-\frac{7}{16}\right) = 0 \\ & \lambda^2 + \frac{19}{14}\lambda + \frac{9}{28} = 0 \\ & \lambda_{1,2} = \frac{-\frac{19}{14} \pm \sqrt{\left(\frac{19}{14}\right)^2 - \frac{9}{7}}}{2} < 0 \end{aligned}$$

Les VPs étant toutes les deux négatives, on en déduit que ce dernier point fixe correspond à un **équilibre stable**.

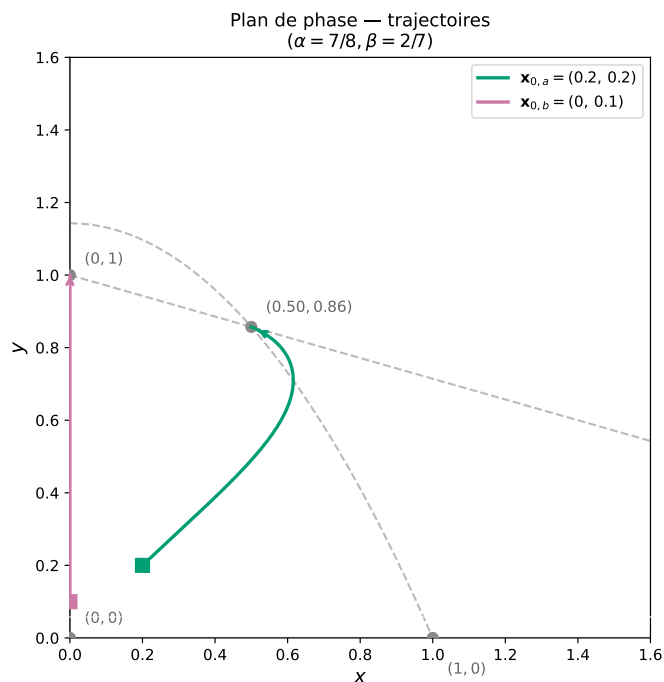
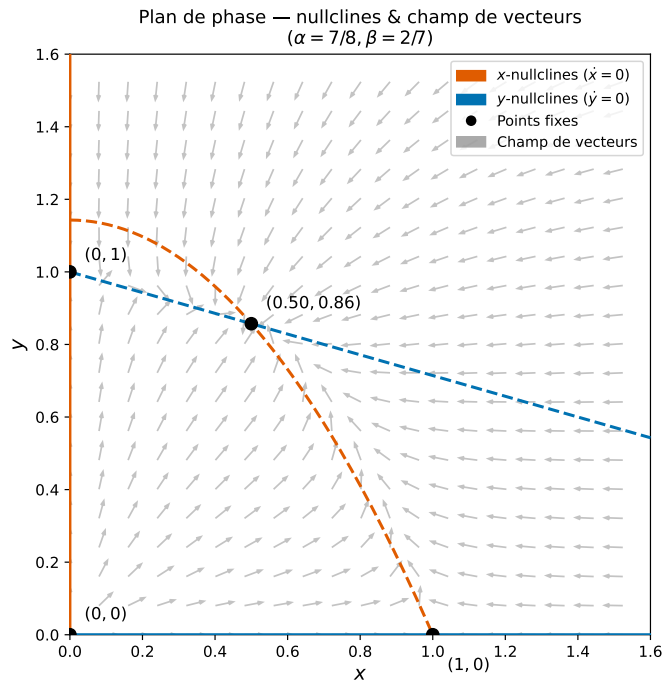
D'un point de vue physique, cela fait sens :

- Le point (0,0) est instable car, dès que deux individus d'une espèce sont introduits dans le milieu, ils vont se reproduire et le système va s'écarter de cet équilibre.
- Les points (1,0) et (0,1) sont des points de selle : tant que seulement une des deux espèces est présente, sa valeur se stabilise à 1, l'équilibre est donc stable dans cette direction. Par contre, dès qu'un individu de l'autre espèce est introduit dans le milieu, l'équilibre est perturbé et le système va s'écarter de cet équilibre.
- Le point $(\frac{1}{2}, \frac{6}{7})$ est naturellement stable car il correspond à l'état de cohabitation naturelle entre les deux espèces.

- vi. Dessinez le plan de phase du système en mettant clairement et explicitement en évidence nullcline(s), points fixes et champ de vecteurs qualitatifs. Dessinez également sur le plan de phase de manière la plus propre et précise possible les trajectoires issues des conditions initiales $\mathbf{x}_{0,a} = (x(0), y(0)) = (0.2, 0.2)$ et $\mathbf{x}_{0,b} = (x(0), y(0)) = (0, 0.1)$. Si cela vous semble plus clair, vous pouvez proposer une seconde version du plan de phase afin d'y distinguer plus nettement les trajectoires.

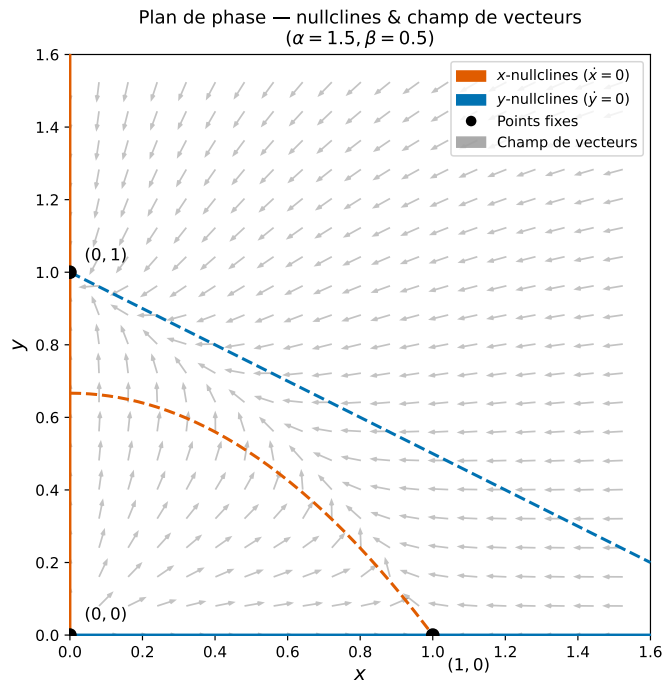
Solution:

Le plan de phase et les trajectoires sont illustrées sur les figures ci-dessous. On peut voir que la trajectoire issue de $(0.1, 0)$ reste sur la nullcline et converge au point de selle. En effet, les conditions initiales étant sur la x-nullcline, le système n'évolue jamais dans cette direction. Cela correspond au cas où le milieu est uniquement peuplé de l'espèce y , qui prend donc possession de l'entière du milieu.



- (b) Julien s'intéresse maintenant à un nouveau set de paramètres : $\alpha = 1.5$ et $\beta = 0.5$.
- i. Tracez un plan de phase pour ce nouveau système incluant la(les) nullcline(s) et identifiez-y les points fixes (les champs de vecteurs ne sont pas attendus).

Solution:



- ii. D'un point de vue physique, comment expliquez-vous la différence entre ce plan de phase et le précédent? Quelles seront les conséquences sur la dynamique du système et la stabilité des points fixes? Aucun calcul n'est attendu à cette question.

Solution: On peut voir que le point d'équilibre correspondant à la co-habitation des deux espèces a maintenant disparu. En effet, les paramètres α et β ont augmentés : la compétition entre les deux espèces est maintenant trop forte pour qu'elles puissent cohabiter. Peu importe les conditions initiales, le système convergera forcément vers $(0,1)$ ou $(1,0)$, menant à l'extermination d'une des deux espèces.

Le paramètre α étant supérieur au paramètre β , on peut s'attendre à ce que le point d'équilibre $(0,1)$ devienne stable, car la population y a une influence plus forte sur la population x et finira donc par l'exterminer. Le point $(1, 0)$ restera lui par contre un point de selle : en l'absence de y , l'espèce x peut toujours proliférer et prendre possession de tout le milieu.

Ces hypothèses sont vérifiées sur le champ de vecteur montré au point précédent, bien que celui-ci ne soit pas attendu dans la résolution de l'examen.

2. Julien, qui s'est récemment découvert une vocation pour la mécatronique, a conçu un plateau stabilisateur automatique pour le café de Guillaume. L'engin, sobrement baptisé *KoffiBot*, repose sur deux moteurs permettant d'incliner le plateau selon deux axes orthogonaux : gauche-droite (piloté par u_1) et avant-arrière (piloté par u_2). Lors de la première démonstration dans le couloir du B28, le plateau s'est mis à vibrer de façon incontrôlable et a projeté la totalité du café de Guillaume sur ses copies fraîchement imprimées.

Guillaume, stoïque, décide de modéliser la dynamique du *KoffiBot* afin d'y ajouter un filtre anti-résonance. Il note $x_1(t)$ et $x_2(t)$ les angles normalisés des deux axes, et $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t))^T$ les commandes moteurs. La représentation d'état du *KoffiBot* est

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

- (a) Guillaume souhaite analyser les deux axes simultanément.
- Démontrez que la matrice de transfert d'un système LTI de représentation d'état (A, B, C, D) est donnée par

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Solution: On applique la transformée de Laplace unilatérale à l'équation d'état, en supposant des conditions initiales nulles :

$$s\mathbf{X}(s) = A\mathbf{X}(s) + B\mathbf{U}(s) \implies (sI - A)\mathbf{X}(s) = B\mathbf{U}(s).$$

La matrice $(sI - A)$ est inversible pour tout s n'appartenant pas au spectre de A , donc

$$\mathbf{X}(s) = (sI - A)^{-1}B\mathbf{U}(s).$$

On substitue dans l'équation de sortie $\mathbf{Y}(s) = C\mathbf{X}(s) + D\mathbf{U}(s)$:

$$\mathbf{Y}(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]\mathbf{U}(s),$$

d'où $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$.

- Identifiez les matrices A, B, C, D du *KoffiBot* et calculez la matrice de transfert $H(s)$. Donnez les pôles et concluez sur la stabilité du système causal associé.

Solution: Avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = C = I_2$ et $D = 0$, on a $H(s) = (sI - A)^{-1}$.

$$sI - A = \begin{pmatrix} s+1 & -5 \\ 5 & s+1 \end{pmatrix}, \quad \det(sI - A) = (s+1)^2 + 25 = s^2 + 2s + 26.$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 26} \begin{pmatrix} s+1 & 5 \\ -5 & s+1 \end{pmatrix}.$$

Les **pôles** sont les solutions de $s^2 + 2s + 26 = 0$: $p_{1,2} = -1 \pm 5j$. Leur partie réelle est $-1 < 0$, donc la ROC du système causal est $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > -1\}$, qui contient l'axe imaginaire : le système est **BIBO stable**.

- (b) Pour calibrer le canal gauche-droite, Guillaume applique la commande $u_1(t) = e^{-t}I(t)$ avec $u_2 = 0$. Dans le domaine de Laplace, calculez $Y_1(s)$ puis retrouvez $y_1(t)$.

Solution: Le canal concerné est

$$H_{11}(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+26} = \frac{s+1}{(s+1)^2+25}.$$

La transformée de Laplace de l'entrée $u_1(t) = e^{-t}I(t)$ est, d'après la table,

$$U_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \Re(s) > -1.$$

Comme $u_2 = 0$, la sortie vérifie $Y_1(s) = H_{11}(s)U_1(s)$, d'où

$$Y_1(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+25} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{1}{(s+1)^2+25} = \frac{1}{5} \frac{5}{(s+1)^2+5^2}.$$

D'après la table, $\sin(5t)I(t) \longleftrightarrow \frac{5}{s^2+5^2}$, et par la propriété de décalage en s :

$$\frac{5}{(s+1)^2+5^2} \longleftrightarrow e^{-t} \sin(5t)I(t).$$

Par conséquent,

$$Y_1(s) = \frac{1}{(s+1)^2+25} \quad \text{et} \quad y_1(t) = \frac{1}{5} e^{-t} \sin(5t)I(t).$$

(c) Julien, qui a suivi le cours de Guillaume avec une assiduité remarquable cette année, affirme qu'on peut retrouver $y_1(t)$ par convolution dans le domaine temporel, sans passer par le domaine fréquentiel.

- i. Sans effectuer les calculs, comment pourrait-on retrouver la réponse impulsionnelle $h_{11}(t)$ à partir des éléments calculés dans les questions précédentes ?

Solution: La réponse impulsionnelle $h_{11}(t)$ est la transformée de Laplace inverse de $H_{11}(s)$, déjà calculée en (a).

- ii. À partir de l'expression $h_{11}(t) = e^{-t} \cos(5t) I(t)$, montrer que la réponse du système obtenue par convolution est bien la même que celle obtenue par passage dans le domaine fréquentiel.

Solution: Les deux signaux étant causaux, le produit de convolution s'écrit, pour $t > 0$:

$$y_1(t) = (h_{11} * u_1)(t) = \int_0^t e^{-\tau} \cos(5\tau) \cdot e^{-(t-\tau)} d\tau.$$

Les exponentielles se simplifient :

$$y_1(t) = e^{-t} \int_0^t \cos(5\tau) d\tau = e^{-t} \left[\frac{\sin(5\tau)}{5} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{e^{-t} \sin(5t)}{5}.$$

On retrouve bien $y_1(t) = \frac{1}{5} e^{-t} \sin(5t) I(t)$, en accord avec la partie (b).

Pour la suite de cette question, vous allez devoir tracer des diagrammes de Bode. La propreté et la lisibilité seront évaluées. Il vous est demandé de suivre les consignes suivantes : Utilisez les conventions habituelles pour tracer les diagrammes de Bode :

- **Diagramme en amplitude :**

- abscisse : échelle logarithmique, unités naturelles ([rad/s]),
- ordonnée : échelle naturelle, unités logarithmiques ([dB]).

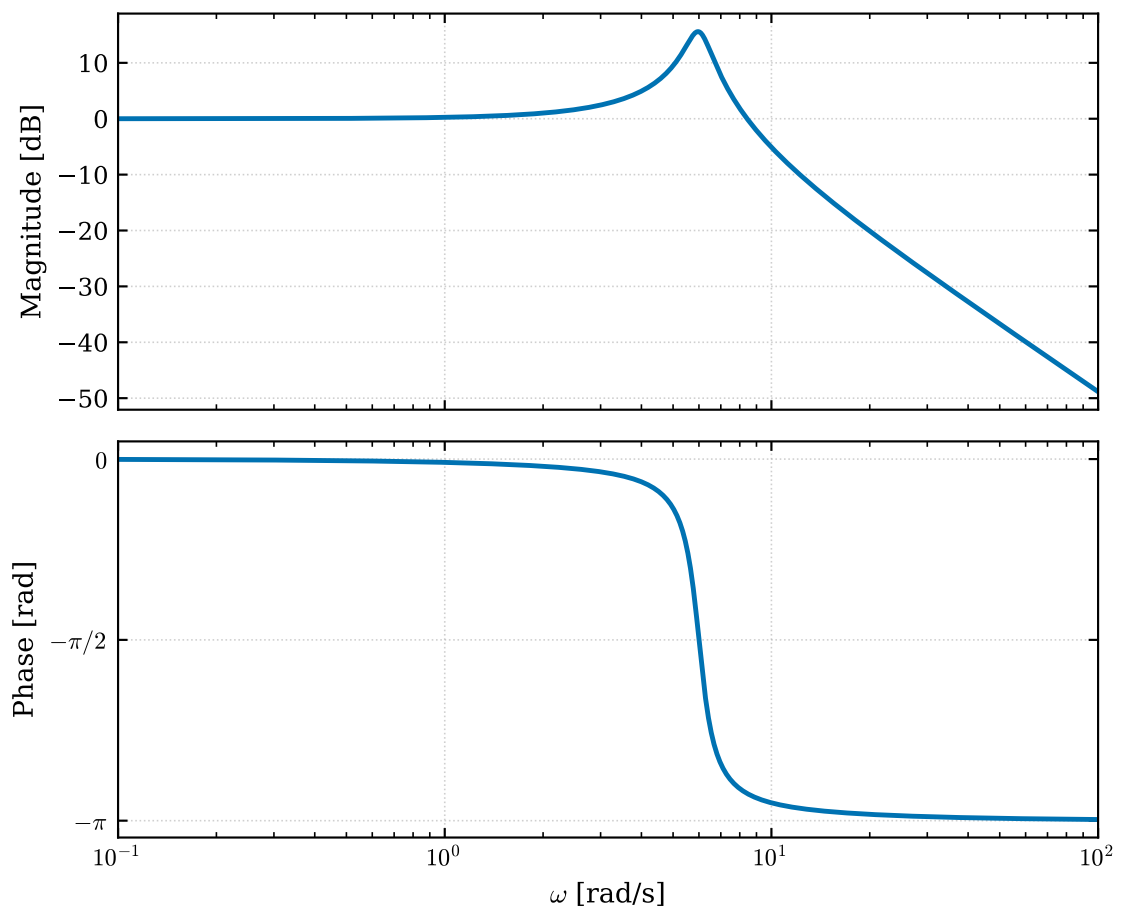
- **Diagramme en phase :**

- abscisse : échelle logarithmique, unités naturelles ([rad/s]),
- ordonnée : échelle naturelle, unités naturelles ([rad]).

- (d) Guillaume finit par comprendre : le vrai coupable n'est pas le plateau mais le café lui-même, dont le ballottement forme un oscillateur peu amorti, modélisé par la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{36}{s^2 + s + 36}$$

dont le diagramme de Bode (amplitude et phase) est représenté ci-dessous.



- i. Sur base des graphiques, identifiez et **indiquez clairement sur ceux-ci** :
- la fréquence de résonance approximative ω_n et le gain statique ;
 - les plages de fréquences amplifiées et atténuées par le système ;
 - les fréquences pour lesquelles le système est en avance de phase.

Solution: **Fréquence de résonance** : le pic se situe à $\omega_n \approx 6 \text{ rad s}^{-1}$.

Gain statique : $|G(0)| = 36/36 = 1 = 0 \text{ dB}$. **Fréquences amplifiées** : $|G(j\omega)| > 0 \text{ dB}$ pour $0 < \omega < \omega_c$, où ω_c est la fréquence de coupure supérieure visible sur le graphique (après le pic, là où la courbe recoupe 0 dB) **Fréquences atténuées** : $|G(j\omega)| < 0 \text{ dB}$ pour $\omega > \omega_c$. **Avance de phase** : il n'y en a pas. La phase d'un système du second ordre à coefficients positifs est toujours comprise entre 0 et $-\pi$: le système est *toujours* en retard de phase.

- ii. Pour atténuer cette résonance, Julien propose d'insérer en série un filtre de la forme

$$H_{\text{filtre}}(s) = \sqrt[10]{10} \frac{s^2 + \alpha s + 36}{s^2 + \beta s + 36},$$

avec trois jeux de paramètres (α, β) :

Paire	α	β
A	13	20
B	20	13
C	13	25

Quelle paire est la plus efficace pour atténuer la résonance ? Justifiez.

Solution: En substituant $s = j\omega_n = 6j$, on remarque que $(j\omega_n)^2 + 36 = -36 + 36 = 0$: les termes en s^2 et la constante s'annulent, et il reste :

$$H_{\text{filtre}}(j\omega_n) = 10^{1/10} \frac{j\alpha\omega_n}{j\beta\omega_n} = 10^{1/10} \frac{\alpha}{\beta},$$

Soit en dB:

$$20 \log_{10}(10^{1/10}) + 20 \log_{10} \frac{\alpha}{\beta} = 2 + 20 \log_{10} \frac{\alpha}{\beta} \text{ dB}.$$

Pour que le filtre **atténue** à la résonance, ce gain doit être inférieur à 0 dB, soit :

$$10^{1/10} \frac{\alpha}{\beta} < 1 \iff \frac{\alpha}{\beta} < 10^{-1/10} \approx 0,79.$$

Paire	α/β	comparaison à $10^{-1/10}$	gain à ω_n
A	$13/20 = 0,65$	$0,65 < 0,79 \checkmark$	$2 - 3,7 \approx -1,7 \text{ dB}$
B	$20/13 \approx 1,54$	$1,54 > 0,79 \times$	$2 + 3,7 \approx +5,7 \text{ dB}$
C	$13/25 = 0,52$	$0,52 < 0,79 \checkmark$	$2 - 5,7 \approx -3,7 \text{ dB}$

La paire C est la plus efficace : $\alpha/\beta = 13/25$ est le plus petit des trois ratios satisfaisant la condition d'atténuation, ce qui donne $\approx -3,7 \text{ dB}$ à ω_n contre $\approx -1,7 \text{ dB}$ pour la paire A.

iii. Pour la paire A, tracez les diagrammes de Bode en magnitude et en phase.

Solution: **Gain statique :**

$$|H_{\text{filtre}}(0)| = 10^{1/10} \cdot \frac{36}{36} = 10^{1/10}, \quad 20 \log_{10}(10^{1/10}) = \frac{20}{10} = 2 \text{ dB}, \quad \angle H_{\text{filtre}}(0) = 0.$$

Factorisation du numérateur : $s^2 + 13s + 36 = 0$, $\Delta = 13^2 - 4 \times 36 = 169 - 144 = 25 = 5^2$.

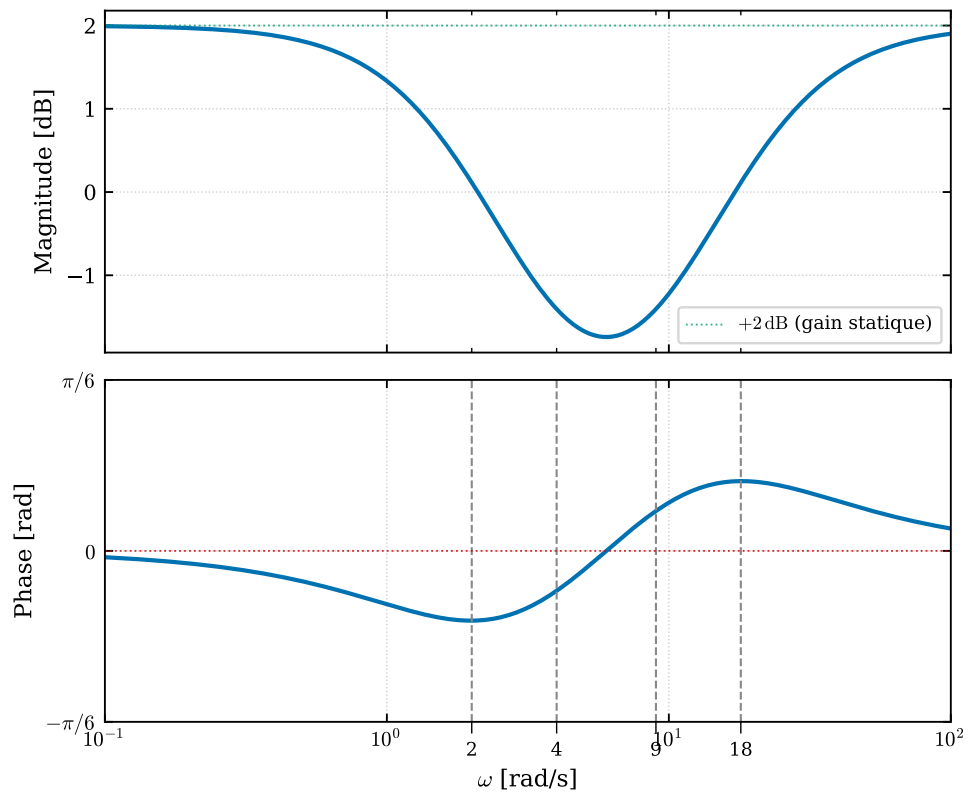
$$s = \frac{-13 \pm 5}{2} \implies z_1 = 4 \text{ rad/s}, \quad z_2 = 9 \text{ rad/s}.$$

Factorisation du dénominateur : $s^2 + 20s + 36 = 0$, $\Delta = 20^2 - 4 \times 36 = 400 - 144 = 256 = 16^2$.

$$s = \frac{-20 \pm 16}{2} \implies p_1 = 2 \text{ rad/s}, \quad p_2 = 18 \text{ rad/s}.$$

On obtient :

$$H_{\text{filtre}}(s) = 10^{1/10} \frac{(s+4)(s+9)}{(s+2)(s+18)}.$$



iv. Quel est le nom général de ce type de filtre ?

Solution: Il s'agit d'un **filtre coupe-bande** (ou filtre réjecteur de bande, filtre notch).

3. State-space (AF)

- (a) Considérons le système d'équations différentielles ordinaires

$$\dot{x} = \sigma(y - x) \quad (1a)$$

$$\dot{y} = x(\rho - z) - y \quad (1b)$$

$$\dot{z} = xy - \beta z \quad (1c)$$

Calculer les équilibres du système en fonction de ses paramètres $\sigma > 0$, $\rho > 0$, $\beta > 0$. En particulier, comparez le cas $\rho < 1$ et le cas $\rho > 1$.

- (b) Étudiez la stabilité des équilibres en fonction des paramètres du système. Que se passe-t-il, en particulier, lorsque ρ devient supérieur à $\rho_1^* = 1$? Et que se passe-t-il lorsque ρ devient plus grand que $\rho_2^* = \sigma \frac{\sigma+\beta+3}{\sigma-\beta-1}$? Quel est le lien entre ces résultats et celui obtenu en (a)? (Suggestion : utiliser le critère de Routh-Hurwitz, qui stipule que pour $a_0, a_1, a_2, a_3 > 0$, toutes les racines du polynôme du troisième degré $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ont une partie réelle négative si et seulement si $a_1a_2 > a_3a_0$).
- (c) (Question bonus - jusqu'à un point si la réponse est correcte) Pour $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = \frac{8}{3}$, le système présente un comportement chaotique. Utilisez les résultats obtenus en (a) y (b) pour fournir une explication qualitative du comportement chaotique du modèle.

Solution: ...

4. Frequency domain (GD)

- (a) Expliquez brièvement le concept de décomposition d'un signal en séries de Fourier. A quel type de signaux cette décomposition s'applique-t-elle? Donnez un exemple d'utilisation de la décomposition en séries de Fourier.

Solution: Éléments de réponse attendus :

- expliquer l'idée de décomposition d'un signal périodique en une combinaison linéaire pondérée d'exponentielles complexes à la fréquence fondamentale du signal et ses harmoniques (en plus de la composante DC, *i.e.* à la fréquence nulle).

- (b) Quelles sont les différences principales entre séries de Fourier, transformée de Fourier et transformée de Laplace en termes de types de signaux ou systèmes auxquels elles s'appliquent, les signaux de base qu'elles utilisent et leurs propriétés de convergence.

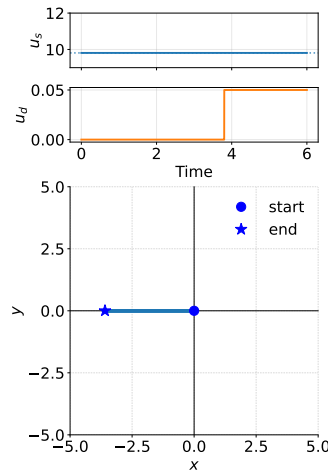
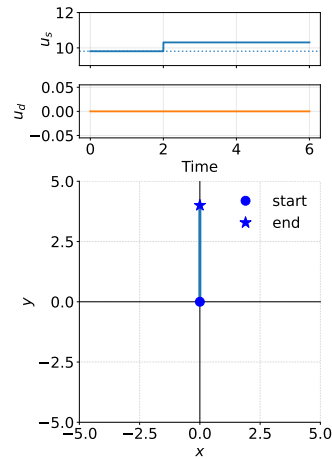
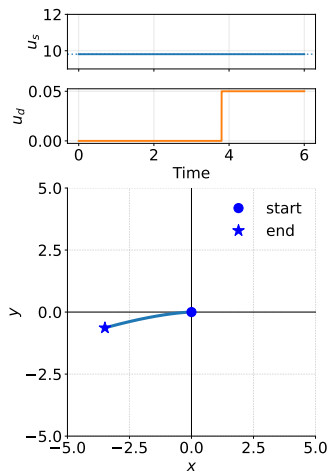
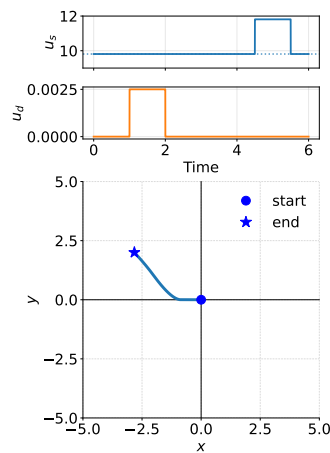
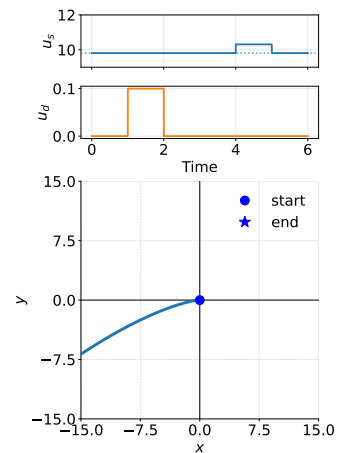
Solution: Éléments de réponse attendus :

- expliquer les différents domaines d'application (signaux périodiques/apériodiques)
- expliquer que les séries et la transformée de Fourier utilisent l'exponentielle complexe avec $s = j\omega$, la transformée de Laplace avec $s = \sigma + j\omega$
- expliquer que les séries et la transformée de Fourier convergent ou non alors que la transformée de Laplace a une ROC,
- expliquer que la transformée de Laplace s'applique à la réponse impulsionnelle des systèmes causaux stables et instables (et possiblement discuter des autres cas de causalité), la transformée de Fourier uniquement les systèmes causaux stables.

5. Question sur le projet

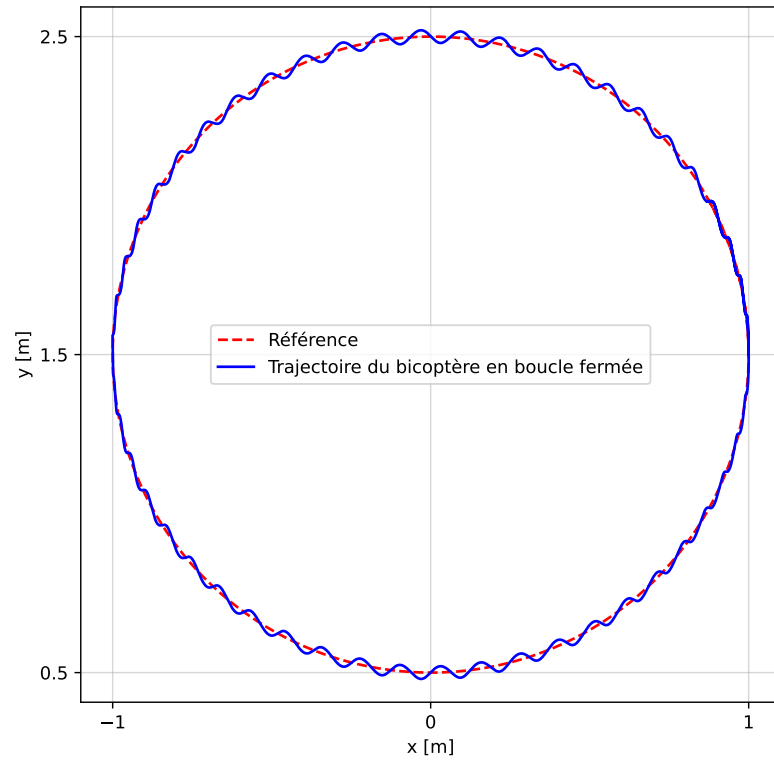
(a) Partie 1 – Modèle d'état, simulations et analyse de stabilité.

Parmi les simulations suivantes, lesquelles **peuvent** être issues du modèle linéarisé ? Vous pouvez cocher plusieurs éléments ; vous devez cocher TOUTES les simulations *compatibles* avec le modèle linéarisé.

☐ Simulation A☐ Simulation B☐ Simulation C☐ Simulation D☐ Simulation E

(b) **Partie 2 – Introduction d'un contrôleur.**

Parmi les valeurs de gains suivantes, lesquelles sont les plus plausibles face à la simulation suivante ? Aucun bruit n'est présent dans la simulation. Une seule réponse possible.

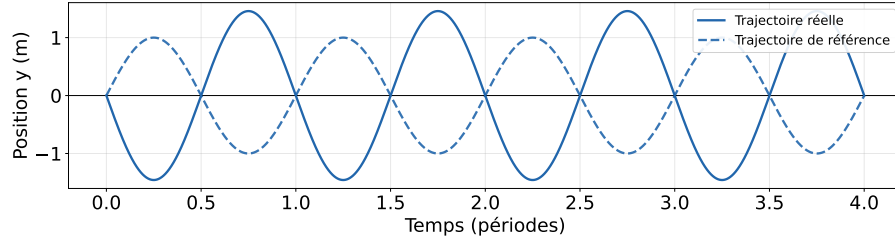
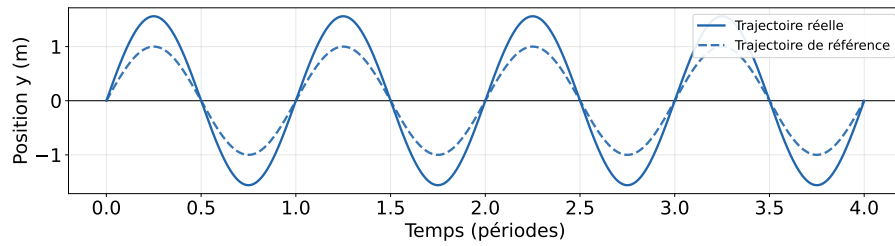
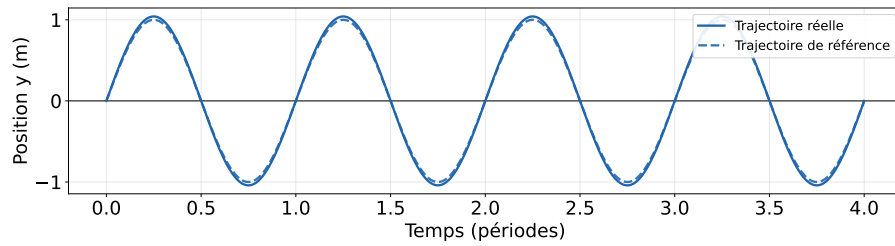
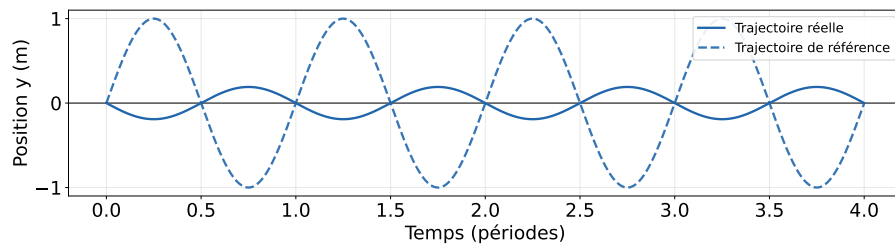


Simulation A

- ☐ $k_\phi = 0$, $k_y = 0$ et $k_x = 0$
- ☐ $k_\phi = -10$, $k_y = 4$ et $k_x = 4$
- ☐ $k_\phi = 4$, $k_y = 4$ et $k_x = 4$
- ☐ $k_\phi = 4 \times 10^{-1}$, $k_y = 4$ et $k_x = 1 \times 10^{-1}$
- ☐ $k_\phi = 1000$, $k_y = 100$ et $k_x = 100$

(c) **Partie 3 – Fonction de transfert et diagrammes de Bode.**

Chacune des simulations ci-dessous est associée à la référence $y_{\text{ref}}(t) = \sin(\omega t)$, pour différentes valeurs de ω . On note ω_n la fréquence naturelle du système. Parmi les propositions suivantes, laquelle est la plus plausible ? Une seule réponse possible.

**Simulation A****Simulation B****Simulation C****Simulation D**

- ☐ $\omega_A \ll \omega_D < \omega_n < \omega_C \ll \omega_B$
- ☐ $\omega_D \ll \omega_A < \omega_n < \omega_B \ll \omega_C$
- ☐ $\omega_C \ll \omega_A < \omega_n < \omega_D \ll \omega_B$
- ☐ $\omega_C \ll \omega_B < \omega_n < \omega_A \ll \omega_D$
- ☐ $\omega_B \ll \omega_C < \omega_n < \omega_D \ll \omega_A$

Extra page 1. Keep calm.

Extra page 2. Don't panic.

Extra page 3. Everything's gonna be alright.

Common Laplace transform pairs

Signal	Transform	ROC
$\delta(t)$	1	$\mathbb{C}$
$1_+(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} > 0$
$-1_+(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} 1_+(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re\{s\} > 0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} 1_+(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re\{s\} < 0$
$e^{-at} 1_+(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re\{s\} > -a$
$-e^{-at} 1_+(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re\{s\} < -a$
$\cos(\omega_0 t) 1_+(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$\sin(\omega_0 t) 1_+(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\Re\{s\} > 0$

Propriété	Signal $x(\cdot)$	Transformée X	ROC
Linéarité	$ax_1 + bx_2$	$aX_1 + bX_2$	$\text{ROC}_1 \cap \text{ROC}_2 \subseteq \text{ROC}_X$
Décalage temporel	$x_1(t - t_0)$	$e^{-st_0} X_1$	$\text{ROC}_X = \text{ROC}_1$
Décalage fréquentiel	$e^{s_0 t} x_1(t)$	$X_1(s - s_0)$	$s \in \text{ROC}_X$ si $s - s_0 \in \text{ROC}_1$
Changement d'échelle temporelle	$x_1(at)$	$\frac{1}{ a } X_1(s/a)$	$s \in \text{ROC}_X$ si $\frac{s}{a} \in \text{ROC}_1$
Complexe conjugué	$\overline{x_1}$	$\overline{X_1(\overline{s})}$	$\text{ROC}_X = \text{ROC}_1$
Convolution	$x_1 * x_2$	$X_1 X_2$	$\text{ROC}_1 \cap \text{ROC}_2 \subseteq \text{ROC}_X$
Dérivée temporelle	$\dot{x}_1$	sX_1	$\text{ROC}_1 \subset \text{ROC}_X$
Dérivée fréquentielle	$-tx_1(t)$	$\dot{X}_1(s)$	$\text{ROC}_X = \text{ROC}_1$
Intégration temporelle	$\int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X_1$	$\text{ROC}_1 \cap \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 0\} \subseteq \text{ROC}_X$

