SYST0002 - Introduction aux signaux et systèmes

Projet : Acrobaties avec un bicoptère

Professeurs	Guillaume Drion & Alessio Franci
Assistants	Julien Vanderheyden & Julien Brandoit

Année académique 2025 - 2026

Consignes

Délivrables

- Ce projet doit être réalisé par groupe de **2** étudiants.
- Ce projet contient 3 parties différentes qui doivent être réalisées à **chaque fois par le même groupe** de 2 étudiants.
- **Les deadlines** des différentes parties sont visibles sur :

  https://julienbrandoit.github.io/teaching/syst0002-2/

- Soumission de chaque partie (rapport et codes) via Gradescope :
  - ⋆ Chaque étudiant doit s'inscrire sur Gradescope en utilisant son adresse @student.uliege.be. Le code du cours est le suivant : **4DYVW7** (n'attendez pas la veille de la date de soumission pour vérifier que vous avez accès au cours sur Gradescope **;-)**).
  - ⋆ N'oubliez pas d'assigner les pages de votre pdf aux questions sur Gradescope !

  Si vous n'êtes pas familiers avec Gradescope, vous trouverez des explications sur chaque étape de la soumission ci-dessous :
  - ⋆ Soumission de pdf,
  - ⋆ Soumission de code,
  - ⋆ Ajout de membres de groupe.
- Les projets envoyés par email ne seront **pas** acceptés.
- Le rapport doit être dactylographié et écrit en LaTeX en suivant le *template* fourni sur la page web du cours (*i.e. report_template.tex*). Interdiction de modifier la police ou les marges !
- Le rapport final (*i.e.* à rendre pour la deadline 3) doit etre concis, clair et précis.
- Nous recommandons d'utiliser Python.
- Portez une attention particulière à vos figures ! Les valeurs des axes doivent être **lisibles**, les labels des axes doivent être **clairs** et accompagnés de leurs unités. Essayez d'avoir des figures les plus épurées possibles : affichez seulement sur vos axes les valeurs nécessaires et suffisantes pour la compréhension de la figure. Par exemple, si vous avez une sinusoïde centrée en 0 et oscillant entre -2 et 2, votre axe y ne devrait comporter que les valeurs -2, 0 et 2, les seules valeurs utiles à la compréhension de votre graphique.

- **Nous évaluons à la fois le contenu et la présentation de celui-ci.**

Questions

Toutes vos questions sur le projet doivent être postées dans le forum de Ed Discussion du cours (une question par fil de discussion). Merci d'indiquer un titre précis permettant une navigation facile sur la page. Ces questions peuvent être posées publiquement, de manière anonyme pour les autres étudiants ou non, ou en privé. Lorsque votre question peut profiter aux autres étudiants, et qu'elle ne comporte pas d'éléments de votre réponse, n'hésitez-pas à la poser publiquement. Dans la même idée, n'hésitez-pas à répondre à une question si vous pensez en connaître la réponse. Un membre du staff vérifiera toujours si celle-ci est correcte. Des *office hours* pourront éventuellement être organisées si un certain nombre d'étudiants en font la demande. Si vous rencontrez des problèmes pour accéder au forum, veuillez en avertir les assistants par e-mail.

Politique de collaboration

Vous pouvez discuter du devoir avec d'autres groupes, mais **vous devez écrire vous-même vos propres solutions, et écrire et exécuter vous-même votre propre code**. Copier la solution de quelqu'un d'autre, ou simplement apporter des modifications triviales pour ne pas copier textuellement, n'est pas acceptable.

Mise en situation

Le professeur Drion souhaite impressionner son laboratoire lors de leur prochain team-building. Il décide pour cela de se tourner vers le pilotage d'un bicoptère afin de réaliser des acrobaties. Comme toute personne raisonnable, il choisit de commencer par l'étude de la dynamique et de la stabilité de l'engin du point de vue de la théorie du contrôle. Le professeur Drion étant particulièrement occupé, il a décidé de vous déléguer ce travail. Il a toutefois pris soin de formaliser le problème avant de vous le confier.

Formalisation

On considère un bicoptère évoluant dans le plan (x, y). Le bicoptère est modélisé comme un solide rigide de masse $m = 1\,\mathrm{kg}$ et de moment d'inertie $I = 0.02\,\mathrm{kgm}^2$ autour de son centre de masse. Le champ de gravité est supposé uniforme et caractérisé par l'accélération $g = 9.81\,\mathrm{m/s}^2$. La distance entre les deux propulseurs est $l = 0.3\,\mathrm{m}$.

Le contrôle du bicoptère est assuré par deux propulseurs indépendants situés aux extrémités des bras. Le propulseur gauche exerce une force $u_1(t) \geq 0$ et le propulseur droit une force $u_2(t) \geq 0$. Ces forces sont supposées perpendiculaires aux bras et orientées selon l'axe y lorsque le bicoptère est à l'horizontale. La variable t désigne le temps.

Afin de simplifier l'écriture des équations, on introduit les combinaisons de commandes

$$u_s(t) = u_1(t) + u_2(t), \qquad u_d(t) = u_1(t) - u_2(t),$$

qui représentent respectivement la poussée totale et la dissymétrie de poussée.

L'état du bicoptère est décrit par les variables

$$x(t), \quad y(t), \quad \phi(t), \quad \dot{x}(t), \quad \dot{y}(t), \quad \dot{\phi}(t), \tag{1}$$

où $x(t)$ et $y(t)$ désignent les coordonnées du centre de masse dans le repère inertiel (x, y), et $\phi(t)$ représente l'orientation du bicoptère, définie comme l'angle entre l'axe x et le bras droit, conformément à la fig. 1. Les dérivées temporelles correspondent aux vitesses linéaires et angulaire.

On considere que les observables sont uniquement :

$$x, \quad y \tag{2}$$

En appliquant les lois de Newton pour la translation du centre de masse et la rotation autour de celui-ci, la dynamique du bicoptère s'écrit

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -\dfrac{u_s(t)}{m}\sin\big(\phi(t)\big), \\ \ddot{y}(t) = \dfrac{u_s(t)}{m}\cos\big(\phi(t)\big) - g, \\ \ddot{\phi}(t) = \dfrac{l}{2I}\,u_d(t), \end{cases} \tag{3}$$

où $\ddot{x}(t)$ et $\ddot{y}(t)$ sont les accélérations selon x et y, et $\ddot{\phi}(t)$ est l'accélération angulaire.

On notera que ce modèle néglige volontairement de nombreux phénomènes tels que les perturbations aérodynamiques dues au vent, les frottements ou encore les effets non linéaires des actionneurs, *hypothèses que le professeur Drion juge parfaitement acceptables au regard de son niveau de pilotage.*

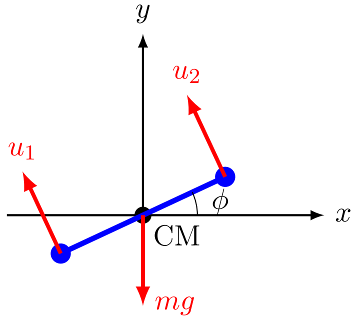

FIGURE 1 – Schéma du bicoptère dans le plan (x, y) et définition de l'angle ϕ

Partie 1 – Modèle d'état, simulations et analyse de stabilité

La deadline *formative* pour cette partie est fixée au 20/03. Vous recevrez vos feedbacks pour le 03/04.

Q1. **Caractérisation du système :**

- Le système est-il linéaire ou non linéaire ? *Justifiez.*
- S'agit-il d'un système temps-variant ou temps-invariant ? *Justifiez.*

Q2. **Écriture de la dynamique suivant le formalisme de la théorie du contrôle :**

- Écrivez un système d'équations différentielles d'ordre 1 équivalent. *En d'autres termes, on cherche un système d'équations de la forme $\dot{x} = f(x, u)$, $y = g(x, u)$.*
- Indiquez les entrées $(u(t))$, les sorties $(y(t))$, et les variables d'état $(x(t))$, ainsi que leur interprétation physique.
- Pour chaque entrée $(u(t))$ et chaque variable d'état $(x(t))$, indiquez le domaine de définition et l'ensemble image.

Q3. **Analyse des points d'équilibre :**

- Déterminez analytiquement les points d'équilibre du système. *Justifiez mathématiquement.*
- Donnez un sens physique à votre réponse précédente.

Q4. **Linéarisation du système :**
À partir de cette question, et pour la suite de votre rapport, il vous est explicitement demandé de classer vos variables d'état dans le même ordre que dans eq. (1) et eq. (2).

- Pour chacun des points fixes identifiés à la question précédente, donnez une représentation du système sous le formalisme matriciel (A, B, C, D). Votre réponse devrait identifier clairement les matrices jacobiennes. *Hint : cette représentation ne fait sens que pour un système linéaire ou linéarisé.*

Q5. **Analyse de la nature des points fixes au travers de la représentation en système d'état :**

- Sur la base de votre réponse au point précédent, il vous est demandé de discuter la nature des points d'équilibre du système. *Hint : profitez de la nature "par blocs" de la matrice ; c'est-à-dire que si M est une matrice définie par blocs, alors son déterminant*[1] *peut être calculé comme suit :*

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix}, \quad \det(M) = \det(M_1 M_4 - M_3 M_2). \tag{4}$$

Cette question demande de la réflexion. Vous devriez revenir à l'origine mathématique de la linéarisation pour y répondre correctement.

1. En LaTeX, vous devriez toujours présenter les opérateurs mathématiques à l'aide des commandes associées. Par exemple : `\sin`, `\cos`, `\det`, ... N'écrivez pas $detM$, mais écrivez $\det M$. La qualité du rapport fait partie des éléments que nous évaluons.

Q6. **Passons aux simulations !**
Afin d'évaluer la qualité du modèle linéarisé, comparez ce dernier pour chacun des points fixes avec le système initial décrit par les équations 3. Pour cela, simulez les deux systèmes à l'aide de `solve_ivp` pendant une durée $T = 3$ sec dans les trois cas décrits ci-dessous.

— **Cas n°1 :** Introduisez une perturbation constante $\Delta u_s = 0.1$ sur la position d'équilibre.
— **Cas n°2 :** Introduisez une perturbation constante $\Delta u_d = 0.01$ sur la position d'équilibre.
— **Cas n°3** : Introduisez une perturbation constante $\Delta u_d = 0.1$ sur la position d'équilibre.

Un code Python permettant la visualisation des résultats est disponible sur la page du cours. Fournissez les trajectoires du bicoptère dans les différents cas considérés et discutez les similitudes/différences entre les deux modèles.

Q7. **Conclusion de la partie 1 :**

— Au regard de la question précédente, le bicoptère met en évidence certaines des limitations des outils linéaires du cours de Signaux et Systèmes. À l'aide des outils numériques, positionnez-vous par rapport à la stabilité du système autour de ses points fixes. Autrement dit, répondez à la question : **Finalement, le système est-il stable ou instable ?** Pour ce faire, considérez une perturbation initiale de $\Delta\phi = +1°$ par rapport aux différents équilibres.
— Cela a-t-il du sens d'un point de vue physique ?