TP1 : systèmes non-linéaire 1D.

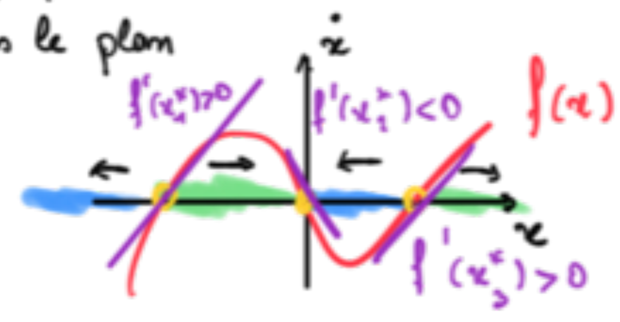
$\boxed{\dot{x} = f(x)\ ,\ x \in \mathbb{R}}$

Analyse qualitative (graphique) — Analyse quantitative (locale)

→ Pas de résolut° d'ODE.

*) Méthode graphique :

→ Dans le plan




- On trace $f(x)$
- Identifie les points fixes du système :

$$f(x)\big|_{x=x^*} = 0$$

- Identifie la nature des points fixes ?
  → trace le champ de vecteurs, à l'aide du signe de $f(x)$ :
  - $f(x) > 0 \rightarrow x \nearrow$ (vers la droite)
  - $f(x) < 0 \rightarrow x \searrow$ (vers la gauche)

→ point fixe "stable" : →•←

→ point fixe "instable" : ←○→

→ autre ? Préciser ! ←◐← , →◐→

*) Méthode quantitative (locale)

$\boxed{\text{LINEARISAT°}}$

(Taylor 1er ordre)

Observation : autour d'un p.f. $x^*$, une (petite) perturbat° $\eta$ est contrainte par la même dynamique que le système.

i.e. $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d(x^*+\eta)}{dt} = \cancel{\frac{dx^*}{dt}}^{0} + \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = \dot{\eta}$

$\dot{\eta} = f(x) = f(x^* + \eta) \overset{\text{Taylor}}{=} \underbrace{\cancel{f(x^*)}^{0}}_{\text{p.f.}} + \eta f'(x^*) + \cancel{O(\eta^2)}$

négligeable (toujours ??)

$$\dot{\eta} = \eta f'(x^*)$$

$$\eta(t) \propto \exp\left(\underline{f'(x^*)} \cdot t\right)$$

le signe de $f'(x^*)$ détermine la nature du p.f !

→ $f'(x^*) > 0$ : p.f. instable

→ $f'(x^*) < 0$ : p.f. stable.

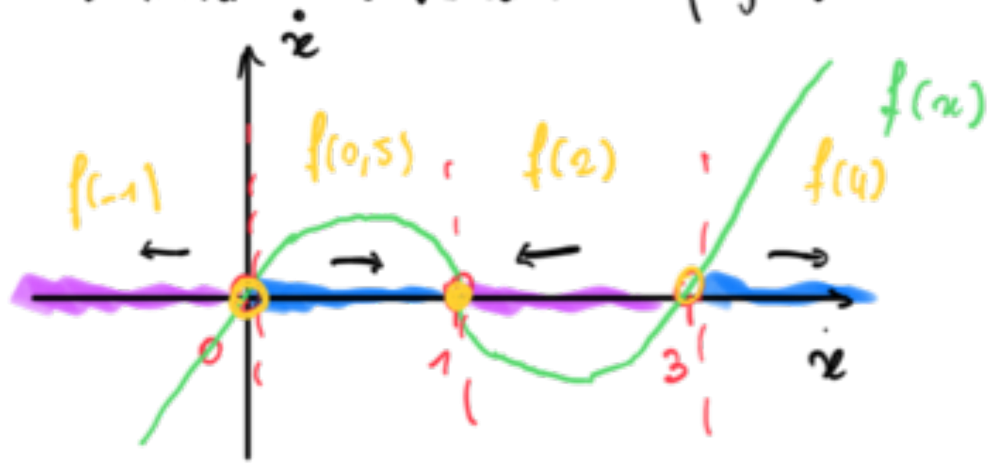
→ $f'(x^*) = 0$ ???

## Exercice 0 :

$$\dot{x} = 3x - 4x^2 + x^3$$

→ champ de vecteurs ?

→ nature et valeurs des p.f. ?




1) Identifie les p.f. :

$$f(x)\big|_{x=x^*} = 0$$

$$f(x) = 3x - 4x^2 + x^3$$
$$= x(3 - 4x + x^2)$$
$$= x(x-3)(x-1)$$

$x_1^* = 0$ ; $x_2^* = 1$ ; $x_3^* = 3$

2) nature ?

→ champ de vecteurs.

$f(x) > 0$ : vers la droite

$f(x) < 0$ : vers la gauche.

$x_1^*$ est instable.

$x_2^*$ est stable.

$x_3^*$ est instable.

## Exercice 1 :

$$\dot{x} = x - \cos(x)$$

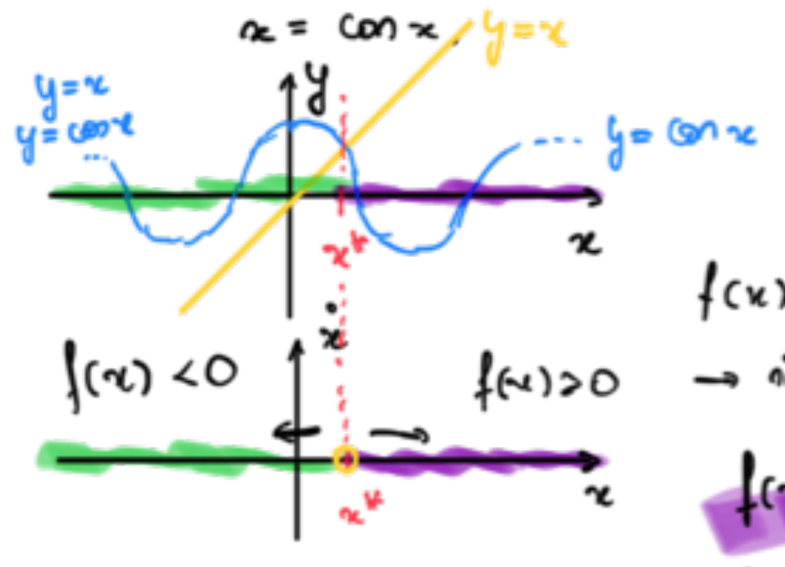
$$f(x) = x - \cos(x)$$

1) Identifie les p.f.

$$f(x)\big|_{x=x^*} = 0$$

$$0 = x - \cos x$$

$$x = \cos x$$




Il y a 1 p.f. $x^*$, qui est instable !

$f(x)$ ?

→ signe de $f(x)$

$f(x) > 0$ : $x > \cos x$

$f(x) < 0$ : $x < \cos x$.