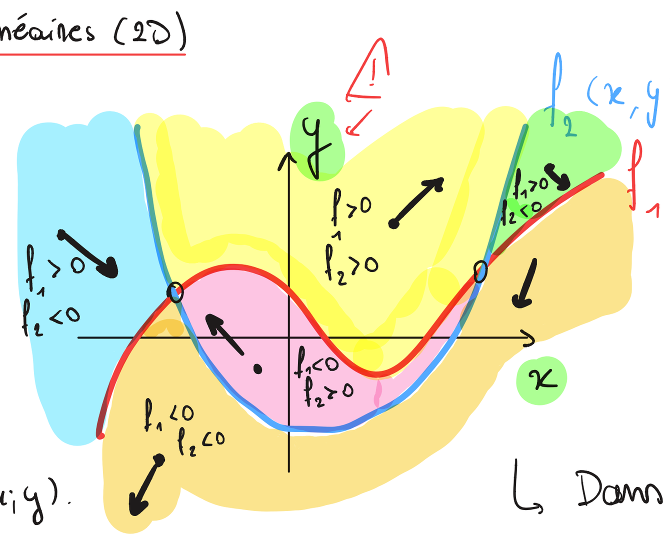
TP 3 : systèmes non-linéaires (2D)

1D : $\dot{x} = f(x)$

$\downarrow$

2D : $\begin{cases} \dot{x} = f_1(x,y) \\ \dot{y} = f_2(x,y) \end{cases}$

→ Le système évolue dans son " plan de phase " $(x;y)$.



↳ Dans une région, la dynamique est qualitativement la même partout ! (pas de changement de signe) !

Pour décrire qualitativement le système, on s'intéresse aux nullclines, au champ de vecteurs, et aux points fixes.

① Le champ de vecteurs indique la direction suivie par le système en chaque point du plan de phase.

→ le signe de $f_1(x,y)$ indique si le système évolue vers la gauche ou vers la droite.

$f_1(x,y)<0$: $\dot{x}<0 \rightarrow x\downarrow$ (vers la gauche)

$f_1(x,y)>0$: $\dot{x}>0 \rightarrow x\nearrow$ (vers la droite)

→ le signe de $f_2(x,y)$ ... vers le haut ou vers le bas.

$f_2(x,y)<0$: $\dot{y}<0 \rightarrow y\downarrow$ (vers le bas)

$f_2(x,y)>0$: $\dot{y}>0 \rightarrow y\nearrow$ (vers le haut).

→ évaluer le champ de vecteurs ponctuellement est facile !

② Les nullclines sont les (2) courbes le long desquelles une des dynamiques s'annule.

$\boxed{f_1(x,y)=0 \text{ est la } x\text{-nullcline}}$ — $f_1(x,y)=0=\dot{x}$ → x est constant { flèches ? vers le haut ou le bas.

$\boxed{f_2(x,y)=0 \text{ est la } y\text{-nullcline}}$ — $f_2(x,y)=0=\dot{y}$ → y est constant { flèches ? vers la gauche ou la droite.

③ Les points fixes sont les solut° de

$\boxed{\begin{cases} f_1(x,y)=0 \\ f_2(x,y)=0 \end{cases}}$ i.e. les p.f. sont les points où la dynamique est nulle ! → ne bouge pas !

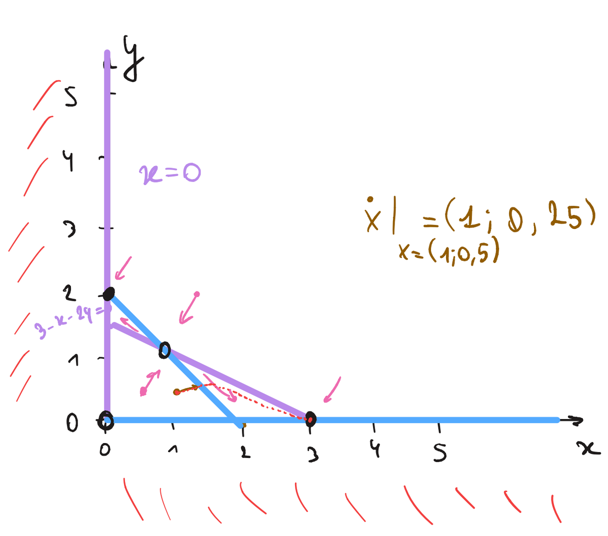
Graphiquement ? → Intersections des nullclines.

Exercice 1 :

$x \geq 0$, $y \geq 0$!

$$\begin{cases} \dot{x} = \underbrace{x(3-x-2y)}_{f_1(x,y)} = 3x - x^2 - 2yx \\ \dot{y} = \underbrace{y(2-x-y)}_{f_2(x,y)} = 2y - xy - y^2 \end{cases}$$

1) Plan de phase et trajectoire depuis $(x_0;y_0) = (1;0,5)$.



• x- cline

On trace les nullclines i.e :

x- cline : $f_1(x,y)=0$

$x(3-x-2y)=0$

• $x=0$

• $3-x-2y=0$
$y=\frac{3-x}{2}$

y- cline : $f_2(x,y)=0$

$y(2-x-y)=0$

$y=0$ et $2-x-y=0$
$y=2-x$

→ 4 p.f. : $(0;0)$ $(3;0)$ $(0;2)$ $(1;1)$

$2-x=\frac{3-x}{2}$

$x=1 ; y=1$

On analyse la nature des p.f.

① Jacobienne :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2x-2y & -2x \\ -y & 2-x-2y \end{pmatrix}$$

② VP. au p.f.

i) $x_1^* = (0;0)$

$$J\big|_{x=x_1^*} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 3$; $\lambda_2 = 2$

→ instable car $\Re(\lambda_1)>0$ et $\Re(\lambda_2)>0$.
→ pas de spirale car $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

ii) $x_2^* = (0;2)$

$$J\big|_{x=x_2^*} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = -2$

→ stable car $\Re\{\lambda_1\}<0$ et $\Re\{\lambda_2\}<0$
→ pas de spirale car $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

iii) $x_3^* = (3;0)$

$$J\big|_{x=x_3^*} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -3$; $\lambda_2 = -1$

→ stable ($\Re\{\lambda_1\}<0$ et $\Re\{\lambda_2\}<0$)
→ pas de spirale car $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

iv) $x_4^* = (1;1)$

$$J\big|_{x=x_4^*} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = A$$

$\det\left(A - \lambda \mathbb{1}\right) \overset{!}{=} 0$

$\lambda_1 = -3-\sqrt{2}$; $\lambda_2 = -1+\sqrt{2}$

→ $\Re\{\lambda_1\}<0$ et $\Re\{\lambda_2\}>0$

→ point de selle !

4) Méthode analytique (locale)

$\boxed{\text{LINEARISAT°}}$

(TAYLOR 1er ordre !)

On est en 2D → Jacobien !

Autour d'un p.f. $(x^*;y^*)$:

$$\begin{cases} f_1(x^*+u;y^*+v) = \cancel{f_1(x^*;y^*)} + u\frac{\partial f_1(x^*;y^*)}{\partial x} + v\frac{\partial f_1(x^*;y^*)}{\partial y} + \cancel{O(u^2;v^2;uv)} \\ f_2(x^*+u;y^*+v) = \cancel{f_2(x^*;y^*)} + u\frac{\partial f_2(x^*;y^*)}{\partial x} + v\frac{\partial f_2(x^*;y^*)}{\partial y} + \cancel{O(u^2;v^2;uv)} \end{cases}$$

?

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}\Bigg|_{(x;y)=(x^*;y^*)}}_{\text{Matrice Jacobienne !}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

On évalue la nature des p.f. à l'aide des valeurs propres de $J\big|_{x=x^*} = A$!

$\boxed{Ax = \lambda x}$ → $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, $\lambda_2 \in \mathbb{C}$

*) Stabilité ? → partie réelle des λ_i.

$\Re\{\lambda_2\}$ \ $\Re\{\lambda_1\}$	<0	>0
<0	stable	point de selle (instable)
>0	point de selle (instable)	instable

→ si $\Im\{\lambda_i\} \neq 0$: on a des oscillations i.e. " une spirale " (stable ou instable).

→ $\Re\{\lambda_i\}=0$ → " centre ".