TP4 : Modèles d'état

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\text{SYSTÈME}} \longrightarrow y(t)$$

Vecteur d'entrée $\in \mathbb{R}^m$
- Ce sur quoi on a une influence

Vecteur d'état $x(t) \in \mathbb{R}^n$
→ Quantité d'information <u>minimale</u> requise pour caractériser l'état d'un système

Vecteur de sortie $\in \mathbb{R}^p$
- Ce qui nous intéresse
+
- Ce qu'on peut mesurer

loi de mise à jour

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

loi de sortie

$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

Si LINÉAIRE

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)$$

$$C \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

Ex :
$$\begin{cases} \dot{a} = 10a + 9b + 3u \\ \dot{b} = -a + 4b \ (+0u) \\ y = 0{,}001\,a \ (+0b)\ (+0u) \end{cases}$$

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0{,}001 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

EN PRATIQUE : Les équations ne sont pas toujours d'ordre 1 !

↳ Ex : $\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = 5u$

⇒ Posons $z = \dot{y}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{y} = z \\ \dot{z} = -2z - 3y + 5u \end{cases}$$

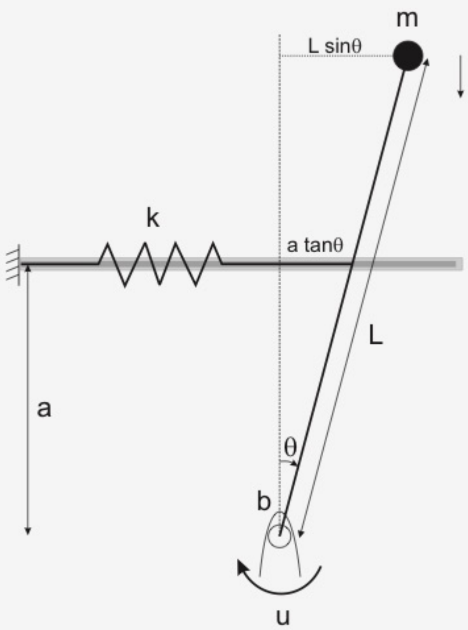
$$x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

2 Exercices résolus au tableau

Exercice 1 = Exercice 2.1 [TXB] (adapté)

Un pendule inversé est maintenu par un ressort horizontal de raideur k. La longueur de la barre inextensible du pendule est L. Le point de fixation ressort-barre est libre de se déplacer, sans frottements, le long de celle-ci afin de maintenir, en permanence, le ressort en position horizontale. La longueur naturelle du ressort, l_0, est atteinte lorsque le pendule est en position verticale inverse ($\theta = 0$). La hauteur de fixation du ressort est a. Une masse ponctuelle m est fixée en bout de barre et est soumise à l'effet de la gravité g . De plus, l'articulation du pendule est soumise à un couple de frottement visqueux $b\dot{\theta}$ où b représente la constante de frottement, et à un couple externe u. On considère comme sortie la position angulaire du pendule θ et comme entrée le couple externe u. Décrivez le système par un modèle d'état basé sur la variable d'état $x = (\theta, \dot{\theta})$. Le schéma est donné ci-dessous.
Grâce aux lois de Newton pour les rotations, la dynamique du système est donnée par l'équation différentielle suivante :

$$mL^2\ddot{\theta}(t) = u - b\dot{\theta}(t) - ka^2\tan(\theta(t)) + mgL\sin(\theta(t))$$



$$mL^2\ddot{\theta} = u - b\dot{\theta} - ka^2\tan(\theta) + mgL\sin(\theta)$$

1) signal d'entrée

- signification : couple externe
- notation : $u(t)$
- domaine : $\mathbb{R}^+$
- image : $\mathbb{R}$

2) Signal de sortie

- signification : position angulaire du pendule
- notation : $y(t) = \theta(t)$
- domaine : $\mathbb{R}^+$
- Image : $[-\theta_{max} ; \theta_{max}]$, $\theta_{max} = \arccos\left[\frac{a}{L}\right]$

3) Variables d'état

$$x(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^+ \longrightarrow [-\theta_{max} ; \theta_{max}] \times \mathbb{R}$$

4) Loi de sortie : $y(t) = \theta(t) = x_1(t)$

5) Loi de mise à jour :

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{u}{mL^2} - \frac{b\,x_2}{mL^2} + \frac{g}{L}\sin(x_1) - \frac{a^2 k}{mL^2}\tan(x_1)$$

LINÉAIRE ? NON CAR "$\sin(x_1)$" et "$\tan(x_1)$"

INVARIANT ? OUI, COEFF CONSTANTS + pas de transformat° de "t"

Question supplémentaire : Est-ce que le système est linéaire ? temps-invariant ?

Exercice 2 = Exercice 4.1 [TXB] (adapté)

Soit un circuit électrique RLC série, dans lequel $u(t)$ (entrée) est la tension au générateur et $y(t)$ (sortie) est la tension aux bornes de la capacité.

La loi des mailles s'écrit ici

$$u(t) = v_L(t) + v_R(t) + v_C(t).$$

Les relations tension-courant aux bornes des composants électriques sont telles que :

$$\begin{cases} v_R &= Ri \\ v_L &= L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ i &= C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}. \end{cases}$$

a) Écrire l'équation entrée-sortie du système.

b) Tracer un bloc-diagramme du système.

c) Donner la représentation d'état correspondante (= matrices ABCD associées au système).

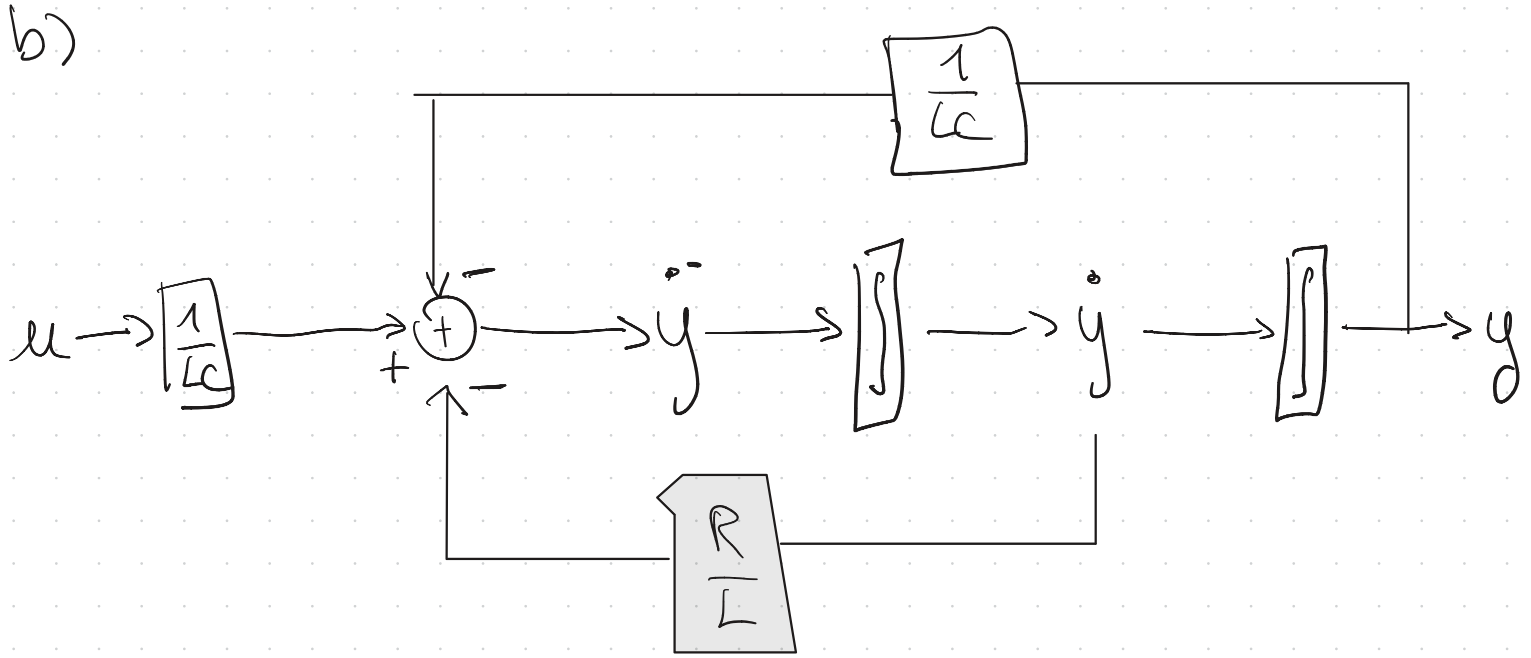
a) $u = v_L + v_R + v_C$

$\Leftrightarrow u = L\dfrac{di}{dt} + Ri + y$

$\Leftrightarrow u = LC\dfrac{d^2y}{dt^2} + CR\dfrac{dy}{dt} + y$

$\Leftrightarrow \ddot{y} + \dfrac{R}{L}\dot{y} + \dfrac{1}{LC}y = \dfrac{u}{LC}$

b)



c) Modèle d'état

Variables d'état $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$

Loi de sortie : $y = x_1$

Loi de mise à jour : $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{u}{LC} - \frac{R}{L} x_2 - \frac{1}{LC} x_1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D} u$$