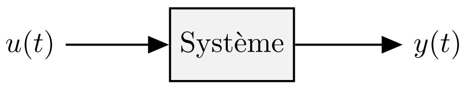
TP4 : Modèles d'état

1 Concept

1.1 Introduction

Le but du cours est d'utiliser des outils d'analyse des systèmes linéaires sans passer par la résolution complète des équations différentielles comme au cours d'analyse. Un système mécanique, électrique, biologique, chimique,... peut être vu comme une boîte noire :



Ainsi, on s'intéresse à la sortie du système, $y(t)$, lorsqu'une certaine entrée $u(t)$ est appliquée. Dès lors, on peut modéliser le système pour pouvoir uniquement agir sur l'entrée et en extraire la sortie.

Exemple mécanique : Considérons le chariot illustré à la Figure 1 avec $x(t)$ la position, k le coefficient

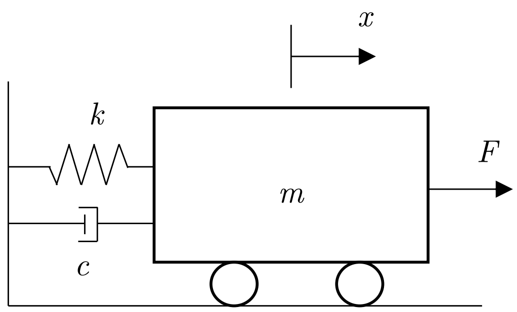
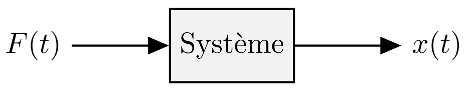


Figure 1 – Exemple de système mécanique

d'élasticité du ressort, c le coefficient d'amortissement visqueux et $F(t)$ la force appliquée.

La méthode vue au cours d'analyse consiste à résoudre l'équation différentielle obtenue en appliquant les lois de Newton. L'objet de ce cours est de se détacher de cette résolution analytique en utilisant de nouveaux outils.

Le chariot peut être considéré comme un système pour lequel on s'intéresse à la position du chariot lorsque l'on applique une certaine force. On peut modéliser le chariot comme une boite noire :



La première étape de ce cours va donc être la construction de cette boite noire ou, autrement dit, le *modèle d'état* du système. Un modèle d'état est une modélisation mathématique d'un système sur base des lois de la physique. Celui-ci se base sur la connaissance de l'*état* du système. "L'état d'un système peut être défini comme la plus petite quantité d'information caractérisée par un ensemble de variables qu'il faut connaître à tout instant t_0 pour pouvoir prédire de façon univoque le comportement de ce système à tout instant $t > t_0$, et pour toute entrée entre t_0 et t. "[1] L'idée de la modélisation est de choisir un certain nombre de variables, qui sont les *variables d'état*, pour décrire le système. Ces variables sont ainsi regroupées dans un vecteur d'état : "un vecteur d'état est un ensemble minimal de variables d'état, c'est-à-dire de grandeurs temporelles, nécessaires et suffisantes pour déterminer l'évolution future d'un système quand on connaît les équations qui décrivent le fonctionnement du

1. On peut aussi visualiser l'état d'un système comme une quantité qui peut évoluer alors que l'entrée est fixe. Dans l'exemple mécanique, on peut par exemple dire que la position est un état car à force constante, elle peut évoluer.

système et les entrées de ce système".

Le modèle d'état permet alors de décrire totalement le système par deux équations (matricielles) :

1. La *loi de mise à jour* décrit la dynamique du système → $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$. Elle permet de déterminer l'état suivant d'un système, sur base de son état actuel et de l'entrée appliquée.
2. La *loi de sortie* décrit la sortie du système → $y(t) = g(x(t), u(t))$. Elle permet d'étudier la sortie d'un système sur base de son état actuel et de l'entrée appliquée.

Ces deux fonctions permettent donc de représenter totalement un système dynamique :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & f(x(t), u(t)) \\ y(t) & = & g(x(t), u(t)). \end{array} \right.$$

De plus, si le système est linéaire, les fonctions f et g sont linéaires et on peut réécrire les deux lois sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t) + Du(t), \end{array} \right.$$

qui fait apparaître 4 matrices (A, B, C et D) qui seront utilisées dans la suite du cours.

Vocabulaire :

- x est appelé vecteur d'état du système, de dimension n → il y a donc n variables d'état.
- u est appelé vecteur d'entrée du système, de dimension m → il y a donc m entrées.
- y est appelé vecteur de sortie du système, de dimension p → il y a donc p sorties.

Le modèle d'état décrit bien le fonctionnement interne de la boite noire. Les variables d'état (x) permettent de caractériser la dynamique du système et de comprendre plus facilement l'impact de l'entrée (u) sur la sortie (y).

Remarque :
Une représentation d'état n'est pas unique. En effet, en fonction du choix des variables d'état, les matrices A, B, C, D peuvent être différentes. On peut trouver une matrice T qui permet de passer d'un modèle d'état à un autre.

1.2 Le modèle d'état en pratique

Pour construire un modèle d'état en pratique, il est conseillé d'être méthodique en appliquant cette marche à suivre :

1- Signaux d'entrée : u. Identifier quels sont les signaux d'entrée et préciser leur domaine (♡ ensemble de valeurs de la variable indépendante sur lequel ils sont définis) et leur image (♡ ensemble des valeurs que le signal peut prendre sur l'ensemble du domaine de la variable indépendante).

2- Signaux de sortie : y. Identifier quels sont les signaux de sortie et préciser leurs domaines et leurs images.

3- Variables d'état : x. Identifier quelles sont les variables d'état choisies et préciser leurs domaines et leurs images.

4- Loi de sortie : $y = g(x, u)$. Loi qui donne l'évolution de(s) sortie(s) *uniquement* en fonction de $x(t)$ et de $u(t)$.

5- Loi de mise à jour : $\dot{x} = f(x, u)$. Loi qui donne l'évolution de l'état *uniquement* en fonction de $x(t)$ et de $u(t)$.

Pour résoudre les exercices, il faut tout d'abord identifier le modèle d'état en spécifiant les signaux d'entrée, de sortie, et les variables d'état.

Comment choisir les variables d'état ? Avec un peu d'intuition, il est possible de définir les variables d'état en repérant les "enregistreurs" d'information qui permettront de remplir notre "boîte noire", en mémorisant les contributions des signaux précédents, pour au final ne s'intéresser qu'à l'entrée et la sortie. Ils sont dans le cas de systèmes physiques les accumulateurs d'énergie :

- variables de vitesses pour l'énergie cinétique.
- variables de positions intervenant dans une énergie potentielle (gravité, longueur du ressort, ...).
- tensions des capacités et courants des inductances pour les circuits électriques.

D'un point de vue mathématique, on peut choisir les variables pour éviter d'avoir une dérivée de l'entrée ou de la sortie dans le modèle final.
Par ailleurs, on choisit (généralement) n variables d'état, où n est l'ordre de dérivation le plus élevé dans l'équation différentielle modélisant le système.

Ensuite, il suffit d'établir les lois de sortie et de mise à jour, en effectuant une *mise en équation* du système.

Construction du modèle d'état à partir d'une équation entrée-sortie Il est souvent relativement facile d'obtenir l'équation entrée-sortie d'un système LTI, i.e. une équation du type

$$P_l(D)y = Q_m(D)u$$

où

- $P_l(D)$ et $Q_m(D)$ représentent des polynômes respectivement de degré l et m en D et
- D représente l'opérateur de dérivation.

L' utilisation d'un signal auxiliaire permet d'obtenir directement un modèle d'état à partir de l'équation entrée-sortie lorsque $l \geq m$ (condition de réalisation).

Construisons le signal auxiliaire v tel que

$$y = Q_m(D)v \text{ et } P_l(D)v = u. \tag{1}$$

Nous pouvons montrer que ces deux équations sont équivalentes au système original. En effet, puisque les dérivées et les opérations linéaires commutent, on a

$$P_l(D)y = P_l(D)Q_m(D)v = Q_m(D)P_l(D)v = Q_m(D)u.$$

De plus, nous remarquons que dans (1), seul v est dérivé, tandis que y et surtout u apparaissent tel quel. Dès lors, le vecteur $(v, v', v'', ..., v^{(l-1)})$ peut être utilisé comme vecteur d'état. La construction des matrices A, B, C, D du modèle d'état est directe.

Dans le cas particulier où $m = 0$, i.e. $Q_m(D)u$ se résume à u multiplié par une constante, on a $y = v$ et le vecteur d'état contient les dérivées de la sortie.

Notions clés

- Maitriser les notions de modèle d'état, signaux d'entrée, sortie, variable d'état
- Domaine : regarder la variable indépendante
- Image : regarder toutes les valeurs que peut prendre le signal
- Loi de mise à jour, loi de sortie
- Tracer un bloc diagramme (voir session d'exercices)
- Utiliser une variable auxiliaire pour transformer une équation entrée-sortie en une représentation d'état

2 Exercices résolus au tableau

Exercice 1 = Exercice 2.1 [TXB] (adapté)

Un pendule inversé est maintenu par un ressort horizontal de raideur k. La longueur de la barre inextensible du pendule est L. Le point de fixation ressort-barre est libre de se déplacer, sans frottements, le long de celle-ci afin de maintenir, en permanence, le ressort en position horizontale. La longueur naturelle du ressort, l_0, est atteinte lorsque le pendule est en position verticale inverse ($\theta = 0$). La hauteur de fixation du ressort est a. Une masse ponctuelle m est fixée en bout de barre et est soumise à l'effet de la gravité g . De plus, l'articulation du pendule est soumise à un couple de frottement visqueux $b\dot{\theta}$ où b représente la constante de frottement, et à un couple externe u. On considère comme sortie la position angulaire du pendule θ et comme entrée le couple externe u. Décrivez le système par un modèle d'état basé sur la variable d'état $x = (\theta, \dot{\theta})$. Le schéma est donné ci-dessous.
Grâce aux lois de Newton pour les rotations, la dynamique du système est donnée par l'équation différentielle suivante :

$$mL^2\ddot{\theta} = u - b\dot{\theta} - ka^2 \tan(\theta) + mgL\sin(\theta).$$

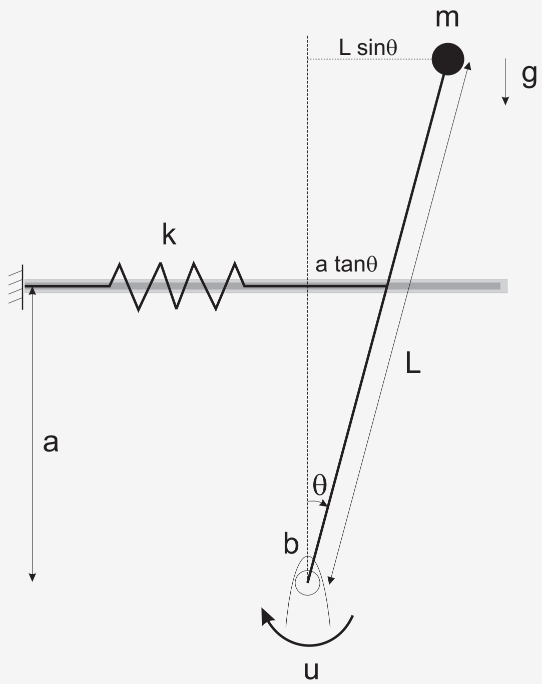


Schéma de résolution : établir un modèle d'état

1- Signal d'entrée :
   - signification : couple externe (information explicite de l'énoncé)
   - notation : $u(t)$
   - domaine : $\mathbb{R}^+$
   - image : $\mathbb{R}$

2- Signaux de sortie :
   - signification : position angulaire du pendule (information explicite de l'énoncé)
   - notation : $y(t) = \theta(t)$
   - domaine : $\mathbb{R}^+$
   - image : $[-\theta_{max}, \theta_{max}]$, $\theta_{max} = \arccos\left(\frac{a}{L}\right)$
     (en général : $[0, 2\pi]$ mais restriction physique à cause de la configuration du pendule et du ressort).

3- Variables d'état : $x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$ (données explicitement dans l'énoncé) : $\mathbb{R}^+ \longrightarrow [-\theta_{max}, \theta_{max}] \times \mathbb{R}$.

4- Loi de sortie : $y(t) = x_1(t)$.

5- Loi de mise à jour : On transforme l'équation différentielle gouvernant le système à l'aide des signaux d'entrée, de sortie et les variables d'état :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & \frac{u(t)}{mL^2} - \frac{bx_2(t)}{mL^2} + \frac{g}{L}\sin\left(x_1(t)\right) - \frac{a^2 k}{mL^2}\tan\left(x_1(t)\right) \end{array} \right.$$

Question supplémentaire : Est-ce que le système est linéaire ? temps-invariant ?

Exercice 2 = Exercice 4.1 [TXB] (adapté)

Soit un circuit électrique RLC série, dans lequel $u(t)$ (entrée) est la tension au générateur et $y(t)$ (sortie) est la tension aux bornes de la capacité.

La loi des mailles s'écrit ici

$$u(t) = v_L(t) + v_R(t) + v_C(t).$$

Les relations tension-courant aux bornes des composants électriques sont telles que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} v_R & = & Ri \\ v_L & = & L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ i & = & C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}. \end{array} \right.$$

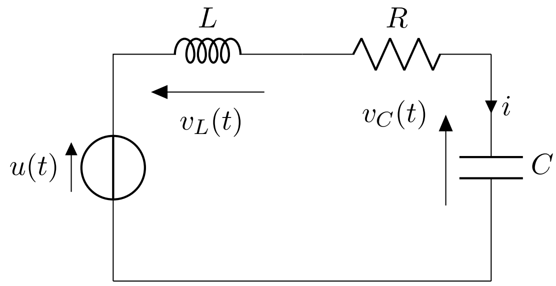
a) Écrire l'équation entrée-sortie du système.

b) Tracer un bloc-diagramme du système.

c) Donner la représentation d'état correspondante (= matrices ABCD associées au système).

a) Schéma de résolution : équation entrée-sortie

• Dessin



• Données

- entrée :
- sortie :

• Équation entrée-sortie

$$\ddot{y} + \frac{R}{L}\dot{y} + \frac{1}{LC}y = \frac{u}{LC}$$

Au cours d'analyse, des outils ont été développés pour résoudre cette équation différentielle linéaire à coefficients constants. Dans le cadre du cours de système, nous allons développer d'autres outils sans devoir passer par la résolution analytique de l'équation.

b) Schéma de résolution : dessiner un bloc-diagramme à partir de l'équation entrée-sortie

1- Réécrire l'équation pour isoler la dérivée de plus haut ordre :

$$\ddot{y} = \frac{u}{LC} - \frac{R}{L}\dot{y} - \frac{1}{LC}y.$$

2- Dessiner les signaux d'entrée et de sortie (flèche qui rentre pour u et flèche qui sort pour y).

3- Ajouter autant de blocs intégrateurs qu'il y a de dérivées. Il n'y aura jamais de bloc de dérivation par définition des bloc-diagrammes.

4- Ajouter les coefficients et relier au signe somme avec le signe adéquat. Ainsi, au niveau du symbole sommatoire, tous les termes du membre de gauche de l'équation entrée-sortie s'additionnent.

c) Schéma de résolution : donner la représentation d'état à partir du bloc diagramme (Méthode 1)

1- On sait que le vecteur d'état est de dimension égale à la plus haute dérivée. De plus, les variables d'état peuvent être choisies comme étant les *sorties des blocs intégrateurs*.

2- loi de sortie

3- loi de mise à jour

4- Écrire le système sous forme de matrices ABCD.

Schéma de résolution : trouver la représentation d'état avec la méthode des variables auxiliaires (Méthode 2)
Cette méthode est utilisée préférentiellement quand l'entrée est également dérivée dans l'équation entrée-sortie donnée.

- But de la méthode :
  Trouver des variables d'état lorsque l'on a uniquement une équation entrée-sortie, afin de construire un modèle d'état. Exemple :

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = \alpha\dot{u} + \beta u.$$

- Démarche : on définit v une variable auxiliaire.
  A partir de l'équation entrée-sortie, on écrit deux équations :

$$\begin{cases} \text{(membre de gauche original où } y \text{ est remplacé par } v) = u \\ y = \text{(membre de droite original où } u \text{ est remplacé par } v). \end{cases}$$

  Dans l'exemple algébrique ci-dessus :

$$\begin{cases} a\ddot{v} + b\dot{v} + cv & = & u \\ y & = & \alpha\dot{v} + \beta v. \end{cases}$$

  On choisit alors le vecteur d'état

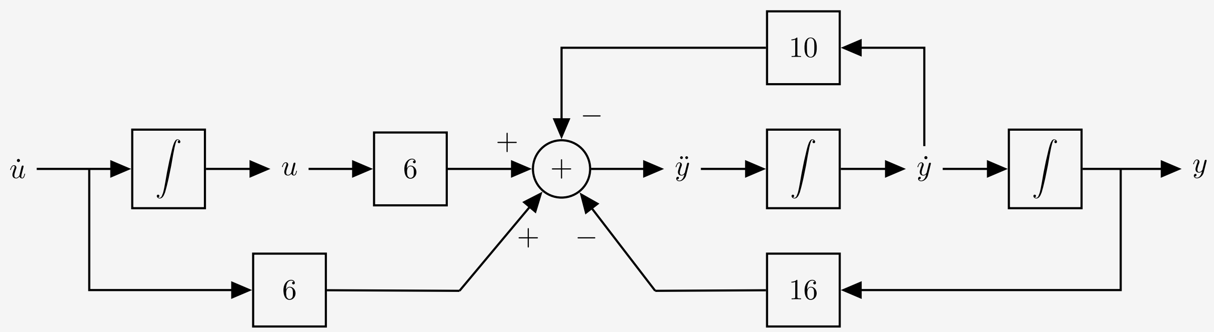
$$\begin{pmatrix} v \\ \dot{v} \end{pmatrix}.$$

  Puis on exprime les lois de sortie et de mise à jour à l'aide des variables d'état, pour finalement obtenir la représentation en matrices ABCD.

3 Exercices à faire

Exercice 3 = Aout 2019-Q2 [Online]

Adaptation de l'énoncé :
a) Donner une équation entrée-sortie correspondant au bloc-diagramme suivant.
b) Donner un modèle d'état correspondant au bloc-diagramme suivant.



Exercice 4 = Exercice 2.7 [TXB] (adapté)
- Remarque : Exercice **fortement suggéré** car il revient dans le prochain TP pour aller plus loin -

Soit le système à deux réservoirs illustré par le schéma ci-dessous.

- Débit d'entrée extérieur (le même pour les deux réservoirs) : u
- Débit de sortie (du second réservoir) : y

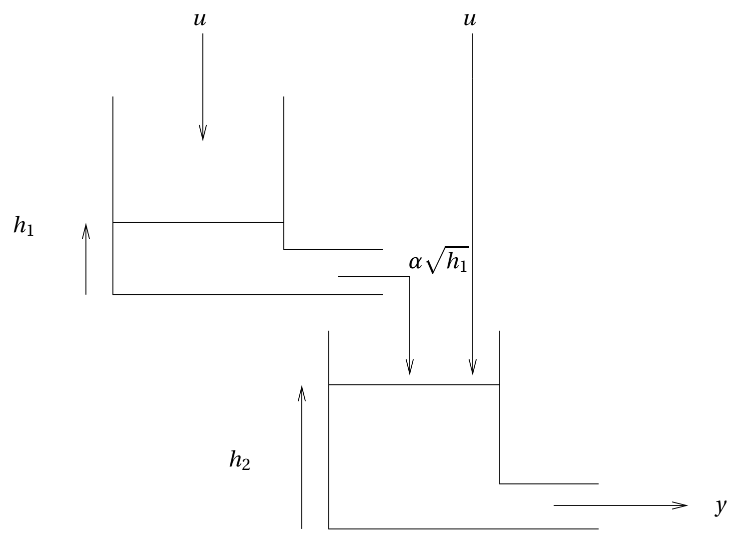
- Bilan de masse dans un réservoir : $\gamma\dot{h} = q_{in} - q_{out}$ avec q_{in} le débit total d'entrée et q_{out} le débit total de sortie
- Débit de sortie d'un réservoir rempli à hauteur h : $\alpha\sqrt{h}$

On suppose que les deux réservoirs sont identiques ; α et γ sont deux paramètres qui déterminent les caractéristiques physiques des réservoirs.

On donne les équations régissant le comportement de chaque réservoir :

- réservoir 1 : $\gamma\dot{h}_1 = u - \alpha\sqrt{h_1}$
- réservoir 2 : $\gamma\dot{h}_2 = u + \alpha\sqrt{h_1} - \alpha\sqrt{h_2}$

Déduire un modèle d'état pour le système.



Questions supplémentaires :

- Est-ce que le système est LTI ?
- Que signifie LTI ? Pourquoi sommes-nous intéréssé·es par les systèmes LTI ? Pourrions-nous dans ce cas écrire les matrices A, B, C et D sans développements supplémentaires ?

4 Pour s'exercer

Exercice 5
Soit l'équation $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = -\exp(-t)\sin(t)$

(a) Le système est-il linéaire ou non linéaire ?

(b) Donner un modèle d'état et les matrices A,B,C,D en considérant que la sortie vaut $\dot{x}$.

Exercice 6 = Janvier 2023 - Q2 (ii) et adapté
Le systéme causal est gouverné par l'équation suivante :

$$\tau\dot{y} + y = Ku(t)$$

oú u est l'entrée, K est un gain positif, y est la sortie et τ est une constante de temps.

(a) Donner un modèle d'état du système.
(b) Tracer le bloc-diagramme associé à ce système.

Exercice 7 = Exercice 2 modifié de https://jalelghabi.weebly.com
Soit le système dynamique définit par son équation entrée-sortie suivante :

$$\dddot{y} - \ddot{y} = 2\ddot{u} + \dot{u}$$

(a) Donner un modèle d'état du système en utilisant 3 variables d'état.
(b) Ce vecteur d'état à 3 variables est-il minimal ? Justifier/Expliquer. Si non, adapter le modèle d'état trouvé en (a) pour le rendre minimal.
(c) Quid si on a $\dot{u} + 2u$ au lieu de $\dot{u} + 2\ddot{u}$ en utilisant toujours ce vecteur d'état à 3 variables ? Justifier/Expliquer.
(d) Tracer le(s) bloc-diagramme(s) associé(s) à ce(s) système(s) minimal (minimaux) et repréciser leur équation entrée-sortie.

TP4

Exercice 1 = Exercice 2.1 [TXB]

Résolution complète :

1- Signal d'entrée :
   - signification : couple externe (information explicite de l'énoncé)
   - notation : $u(t)$
   - domaine : $\mathbb{R}^+$
   - image : $\mathbb{R}$

2- Signaux de sortie :
   - signification : position angulaire du pendule (information explicite de l'énoncé)
   - notation : $y(t) = \theta(t)$
   - domaine : $\mathbb{R}^+$
   - image : $[-\theta_{max}, \theta_{max}]$, $\theta_{max} = \arccos\left(\frac{a}{L}\right)$
     (en général : $[0, 2\pi]$ mais restriction physique à cause de la configuration du pendule et du ressort).

3- Variables d'état : $x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$ (données explicitement dans l'énoncé) : $\mathbb{R}^+ \longrightarrow [-\theta_{max}, \theta_{max}] \times \mathbb{R}$.

4- Loi de sortie : $y(t) = \theta(t) = x_1(t)$.

5- Loi de mise à jour : $mL^2\ddot{\theta} = u - b\dot{\theta} - ka^2\tan(\theta) + mgL\sin(\theta)$ (On applique la loi de Newton en rotation).

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{u(t)}{mL^2} - \frac{bx_2(t)}{mL^2} + \frac{g}{L}\sin\left(x_1(t)\right) - \frac{a^2k}{mL^2}\tan\left(x_1(t)\right) \end{cases}$$

Note : Modèle d'état = loi de mise à jour + loi de sortie

Modèle linéaire ? Non car $\tan\theta(t)$ et $\sin\theta(t)$ sont non-linéaires (ex : $\tan(\theta_1(t) + \theta_2(t)) \neq \tan\theta_1(t) + \tan\theta_2(t)$)
Modèle temps-invariant ? Oui car les coefficients sont constants et pas de transformations combinées dans les signaux.

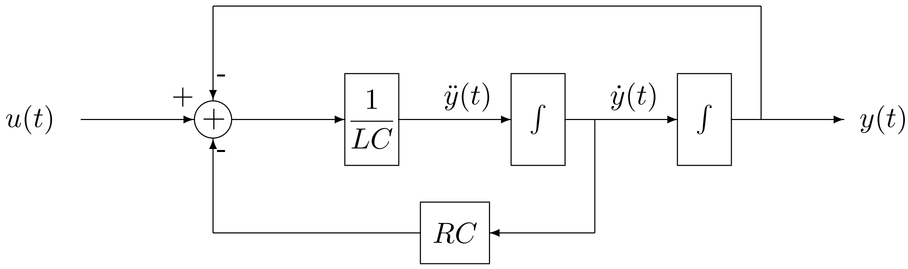
Exercice 2 = Exercice 4.1 [TXB]

a) Équation différentielle : $LC\ddot{y}(t) + RC\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$
   Pour $u(t) = 0$, la solution générale s'écrit :

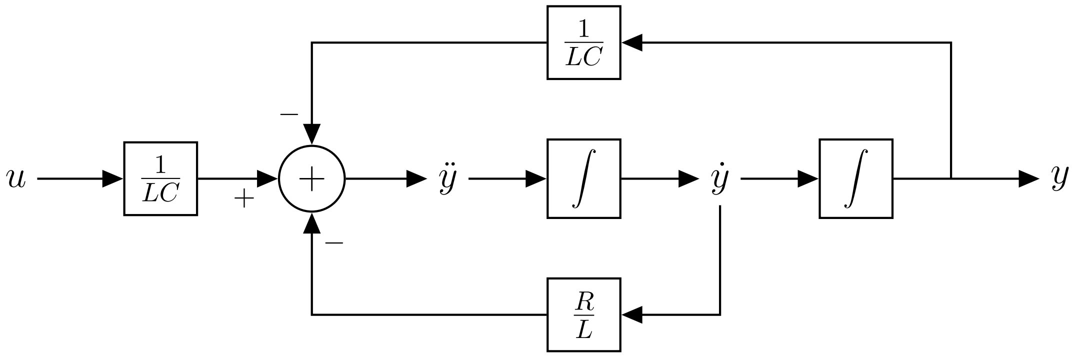
$$y(t) = Ae^{(-\zeta + j\sqrt{\omega^2 - \zeta^2})\,t} + Be^{(-\zeta - j\sqrt{\omega^2 - \zeta^2})\,t}$$

   où $\zeta = \frac{R}{2L}$ et $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.
   (Simplement pour montrer la résolution ODE comme au cours d'analyse - à ne pas savoir faire dans le cadre de ce cours).

b) Bloc-diagramme :



peut aussi être dessiné comme ceci :



Entrée : tension au générateur u(t) : $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
Sortie : tension aux bornes de la capacité y(t) $= V_C(t)$
1- Ici, on voit apparaître $\ddot{y}$ qui donne l'ordre de l'équation différentielle ($n = 2$), et donc le nombre de variable d'état dans le système. Cela vient de la définition des variables d'état qui permettent de décrire la dynamique interne du système.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, par définition de la représentation d'état, il faut que y et u apparaissent sans dérivée.

2- La loi de sortie peut donc être directement écrite :

$$y(t) = x_1(t)$$

3- Ensuite, on peut réécrire l'équation donnée en fonction des nouvelles notations introduites :

$$\dot{x}_2 = \frac{u}{LC} - \frac{R}{L}x_2 - \frac{1}{LC}x_1$$

Et la deuxième loi de mise à jour découle directement du choix des variables d'état

$$\dot{x}_1 = x_2$$

4- Ainsi, le modèle d'état s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{LC} & \frac{-R}{L} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{pmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}}_{D} u$$

Exercice 3 = Août 2019 - Q2
Résolution complète
a) Équation entrée-sortie
Lire au niveau du grand symbole somme : "sortie du symbole +" ($\ddot{y}$) = somme des entrées, avec le signe associé :

$$\ddot{y} = 6\dot{u} + 6u - 10\dot{y} - 16y$$

b) Modèle d'état
On réécrit l'équation $\ddot{y} + 10\dot{y} + 16y = 6\dot{u} + 6u$ et on introduit la variable auxiliaire v. Deux équations :

$$\begin{cases} \ddot{v} + 10\dot{v} + 16v &= u \\ y &= 6\dot{v} + 6v \end{cases}$$

Entrée : u ($\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$) ; Sortie : y ($\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$)
En choisissant le vecteur d'état (x_1 et x_2 peuvent être inversés ; $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \dot{v} \end{pmatrix}$$

On obtient directement le modèle d'état suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -10 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 6 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}}_{D} u$$

Exercice 4 = Exercice 2.7 [TXB]
Comportement des réservoirs :

$$\gamma \dot{h}_1 = u - \alpha\sqrt{h_1}$$
$$\gamma \dot{h}_2 = u + \alpha(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})$$

$\Rightarrow$ Modèle d'état :

- Signal d'entrée : $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, débit d'entrée extérieur
- Signal de sortie : $y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, débit de sortie du second réservoir
- Signal d'état : $x = (x_1, x_2) = (h_1, h_2) : \mathbb{R}^+ \to {\mathbb{R}^+}^2$, hauteurs d'eau dans les réservoirs
- Loi de sortie : $y(t) = \alpha\sqrt{x_2(t)}$
- Mise à jour de l'état :

$$\dot{x}_1 = \tfrac{1}{\gamma}(\, u - \alpha\sqrt{x_1}\,)$$
$$\dot{x}_2 = \tfrac{1}{\gamma}(\, u + \alpha(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})\,)$$

Linéaire ? Non car racines carrées sur les signaux des hauteurs
Temps-invariant ? Oui car coefficients constants et pas de transformations combinées dans les signaux.
Matrices ABCD ? Voir TP suivant. Pour l'instant, pas possible de les obtenir car le système est non-linéaire.

Exercice 5

(a) Le système est linéaire même si le signal d'entrée $u(t) = \exp(-t)\sin(t)$ est non linéaire.

(b) Soient $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$ nos états. Notre modèle d'état devient :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (0)u$$

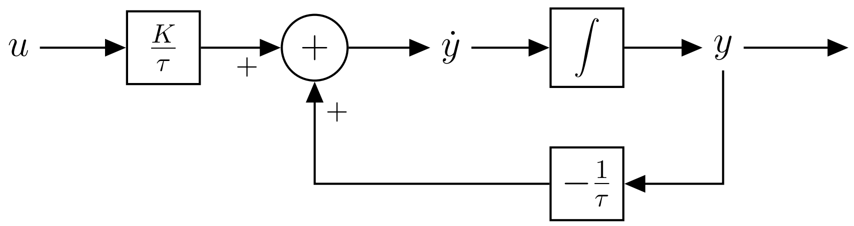
avec $u(t) = \exp(-t)\sin(t)$. Les matrices A, B, C, D sont facilement lisible à partir de cette représentation ($\dot{x} = Ax + Bu$ et $y = Cx + Du$)

Exercice 6 = Janvier 2023 - Q2 (ii) et adapté

(a) Modèle d'état ?

- Entrée $u(t) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
- Sortie $y(t) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
- Variable d'état : Ordre de la plus grande dérivée = 1 → 1 variable d'état = $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
- Loi de mise à jour : $\dot{x} = \frac{1}{\tau}x + \frac{K}{\tau}u = \underbrace{\left(\frac{1}{\tau}\right)}_{A} x + \underbrace{\left(\frac{K}{\tau}\right)}_{B} u$
- Loi de sortie : $y = x = \underbrace{(1)}_{C}\, x + \underbrace{(0)}_{D}\, u$

(b) Bloc diagramme :



Exercice 7 = Exercice 2 modifié de https://jalelghabi.weebly.com

(a) Modèle d'état ?

- Entrée $u(t)$:$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
- Sortie $y(t) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
- Méthode des variables auxiliaires car l'entrée est sous forme dérivée. En utilisant la variable auxiliaire v, on a

$$\begin{cases} \dddot{v} - \ddot{v} & = u \\ y & = \dot{v} + 2\ddot{v} \end{cases}$$

Vecteur d'état à 3 variables $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = (v, \dot{v}, \ddot{v})^T$ $(\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3)$

- Loi de mise à jour : $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_3 + u \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} u$

- Loi de sortie : $y = x_2 + 2x_3 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \underbrace{(0)}_{D} u$

(b) Non, ce vecteur d'état à 3 variables n'est pas minimal car l'état x_1 n'apporte aucune information nécessaire et suffisante ⇒ elle est redondante ou inutile. Un modèle d'état minimal dérivé de (a) est $(x = (x_2, x_3)^T)$:

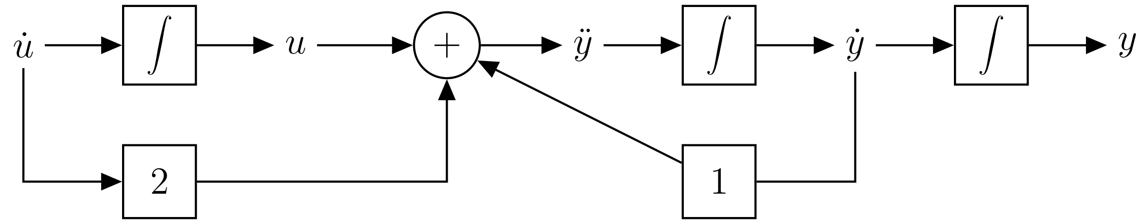
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 + u \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} u$$

$$y = x_2 + 2x_3 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \underbrace{(0)}_{D} u$$

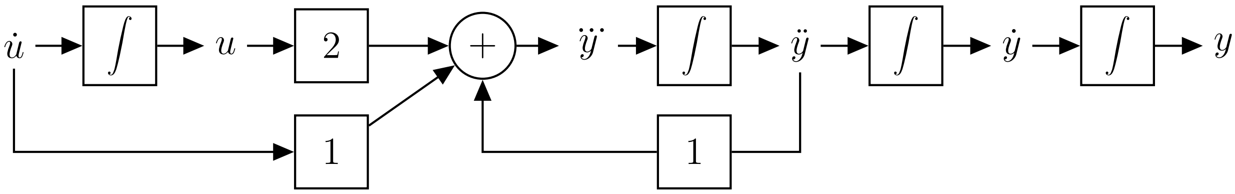
(c) Si on a $\dot{u} + 2u$ au lieu de $\dot{u} + 2u$, alors le modèle d'état en (a) est minimal car on a besoin de x_1

et x_2 pour prédire la sortie et on a aussi besoin de x_3 pour décrire l'évolution de x_2.

(d) Pour la version minimale en (b) : $\dddot{y} - \ddot{y} = 2\ddot{u} + \dot{u}$ (à noter que c'est équivalent à $\ddot{y} - \dot{y} = 2\dot{u} + u$)



Pour la version minimale en (c) (avec $2u + \dot{u}$) : $\dddot{y} - \ddot{y} = 2u + \dot{u}$



L'étudiant.e remarquera entre autres le changement de nombre d'intégrateurs pour y et ses dérivées.