TP 5 : Modele d'etat et linéarisat°.

TP 3 : $\boxed{\dot{x} = f(x,u)}$

→ Les points fixes sont les solut° de

$$\boxed{f(x;u)\Big|_{x=x^*,\, u=u^*} = 0}$$

Toujours ?

→ On peut linearisen autour des p.f. pour discuter leur stabilité !

$$\boxed{\dot{x} \approx J_x(x;u)\Big|_{x=x^*;\, u=u^*} x}$$

Matrice Jacobienne : $J_x = \frac{\partial f}{\partial x}$

↳ Les valeurs propres de J_x au p.f. donnent la stabilité.

$\Re\{\lambda\} < 0$?

$\Re\{\lambda\} > 0$?

$\Im\{\lambda\} \neq 0$?

TP 4 : Les systemes sont decrits par une loi de mise à jours et une loi de sortie.

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= f(x;u) \\ y &= g(x;u) \end{aligned}}$$

LTI ?

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

4 matrices pour decrire completement une representat° d'état

⇓

$$\boxed{\text{On peut décrire } (A;B;C;D) \text{ autour des points fixes car on linéarise !}}$$

Toujours ? ... oui...

Toujours informatif ? ...

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x^*;u^*} ;\quad B = \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{x^*;u^*} ;\quad C = \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{x^*;u^*} ;\quad D = \frac{\partial g}{\partial u}\Big|_{x^*;u^*}$$

Stabilité !

Autre (spoiler... à reponse "frequentielle")

→ "methode des petites perturbations" = faire Taylor explicitement.

→ "Methode du Jacobien" = faire Taylor implicitement.

Exercice 1.

a) Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$ (posit° ; vitesse) nos états. L'entrée $u = i$ est le courant appliqué. La sortie $y = x_1 = x$ est la position de la bille.

Modèle d'état : $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = g - \frac{L}{2m}\frac{u^2}{(1+x_1)^2} \\ y = x_1 \end{cases}$ $\left.\right)$ $\dot{x} = f(x;u)$ $\left.\right)$ $y = g(x;u)$

$\left[\begin{array}{l} m\ddot{x} = mg - \frac{L}{2(1+x)^2}u^2 \\ m\dot{x}_2 = mg - \dots \\ \dot{x}_2 = \dots \end{array}\right.$

→ non-linéaire ; temps-invariant !

u^2 ; $\frac{1}{(1+x_1)^2}$; produit !

b) Modèle d'état linéaire.

① P.f. :

$f(x;u)\Big|_{x=x^*,u^*} = 0 \rightarrow \begin{cases} x_2^* = 0 \\ 0 = g - \frac{L}{2m}\frac{u^{*2}}{(1+x_1^*)^2} \end{cases}$

$(1+x_1^*)^2 = \frac{2mg}{L}u^{*2}$

$x_1^* = \pm|u^*|\sqrt{\frac{L}{2mg}} - 1.$

On a, pour une entrée constante donnée u^*, deux points fixes :

$$x_1^* = \begin{pmatrix} -|u^*|\sqrt{\frac{L}{2mg}} - 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x_2^* = \begin{pmatrix} +|u^*|\sqrt{\frac{L}{2mg}} - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

② Matrices Jacobiennes :

Note : on fait les 2 p.f. en même temps... il faut le faire pour chaque p.f !!
→ un ensemble (A; B; C; D) par $X = X^*; u = u^*$!

$$J_x(x;u) = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cancel{-}\frac{Lu^{*2}}{\cancel{2}m}\cdot\cancel{(-2)}\cdot\frac{1}{(1+x_1^*)^3} & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{Lu^{*2}}{m}\frac{1}{(1+x_1^*)^3} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow A = J_x\Big|_{x=x^*;u=u^*} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{Lu^{*2}}{m}\cdot\underbrace{\frac{1}{\left(\cancel{1}+|u|^*\sqrt{\frac{L}{2mg}}\cancel{-1}\right)^3}} & 0 \end{pmatrix}$$

$= \frac{2}{u^*}\sqrt{\frac{2mg}{L}}\,g$

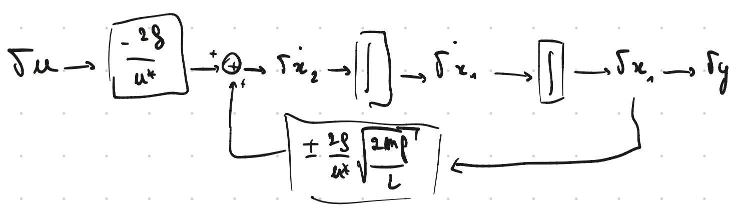
stabilité ?

$$J_u(x;u) = \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{L}{m}u^*/(1+x_1)^2 \end{pmatrix} \longrightarrow B = J_u\Big|_{\dots} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2g}{u^*} \end{pmatrix}$$

$C = (1 \quad 0) \qquad D = 0$

③ $$\begin{pmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm\frac{2g}{u^*}\sqrt{\frac{2mg}{L}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2g}{u^*} \end{pmatrix}\delta u^*$$

$$\delta y = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} + 0\,\delta u$$



$$\frac{a}{L} < \frac{a^2}{L} \cdot \frac{k}{mg}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{ka}{mg} < 1}$$

$$\left(\frac{-b}{mL^2}\right)^2 - 4\left(\frac{ke^2}{mL^2} - g/L\right) \geq 0$$

$$\frac{b^2}{m^2L^4} - 4\frac{ka^2}{mL^2} + \frac{4g}{L} \geq 0$$

$$b^2 - 4ka^2mL^2 + 4gm^2L^3 \geq 0$$

$$\frac{b^2}{4gm^2L^3} - \frac{ka^2}{gmL} + 1 \geq 0$$