

1 Concept

Le TP précédent permet de décrire un problème réel sous forme d'un modèle d'état, exprimé à l'aide de ses signaux d'entrées, de sorties et ses variables d'état. La dynamique du système est donc décrite à l'aide de ses lois de sorties et de mise à jour.

Lors du TP1, les propriétés des systèmes ont été abordées et particulièrement la linéarité et l'invariance. Lorsqu'un système est linéaire, temps-invariant (LTI), il peut s'étudier à l'aide de différents outils qui vont être abordés tout au long du cours, tels que les matrices ABCD.

Après avoir établi le modèle d'état, il faut donc vérifier si le système est LTI :

- si oui, alors il peut être décrit à l'aide de ses matrices ABCD.
- si non, il faut le linéariser :
 - soit autour d'une solution quelconque ; vous obtiendrez bien un système linéaire mais ce n'est pas garanti qu'il sera temps-invariant.
 - soit autour d'un point stationnaire (= point fixe ou d'équilibre, *cfr.* TP2-TP3) ; vous obtiendrez bien un système LTI.

Étudier un système *autour* de ses points d'équilibre

La dynamique du système *global* est décrite par les signaux x, u, y telle que :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t)). \end{cases}$$

Si le système est non-linéaire, on doit linéariser *autour des points fixes* afin de rendre les lois de mise à jour et de sortie linéaires. On n'étudie pas non plus le système dans son intégralité mais uniquement la dynamique autour de ses points d'équilibre, *i.e.* la dynamique du système *local* (linéarisé autour des points d'équilibre). Au début, on va donc écrire les lois linéarisées associées au système local à l'aide de signaux "locaux" $\delta x(t), \delta y(t), \delta u(t)$ (présentés précédemment comme des petites perturbations)¹.

Pour rappel ♡ : un *point fixe* = *point stationnaire* = *point d'équilibre* $\mathbf{x}^*$ est tel que $\dot{\mathbf{x}}|_{\mathbf{x}^*} = \mathbf{0}$.

Comment linéariser ?

Il existe deux méthodes :

- Méthode 1 = méthode des petites perturbations
- Méthode 2 = méthode des dérivées (matrice jacobienne).

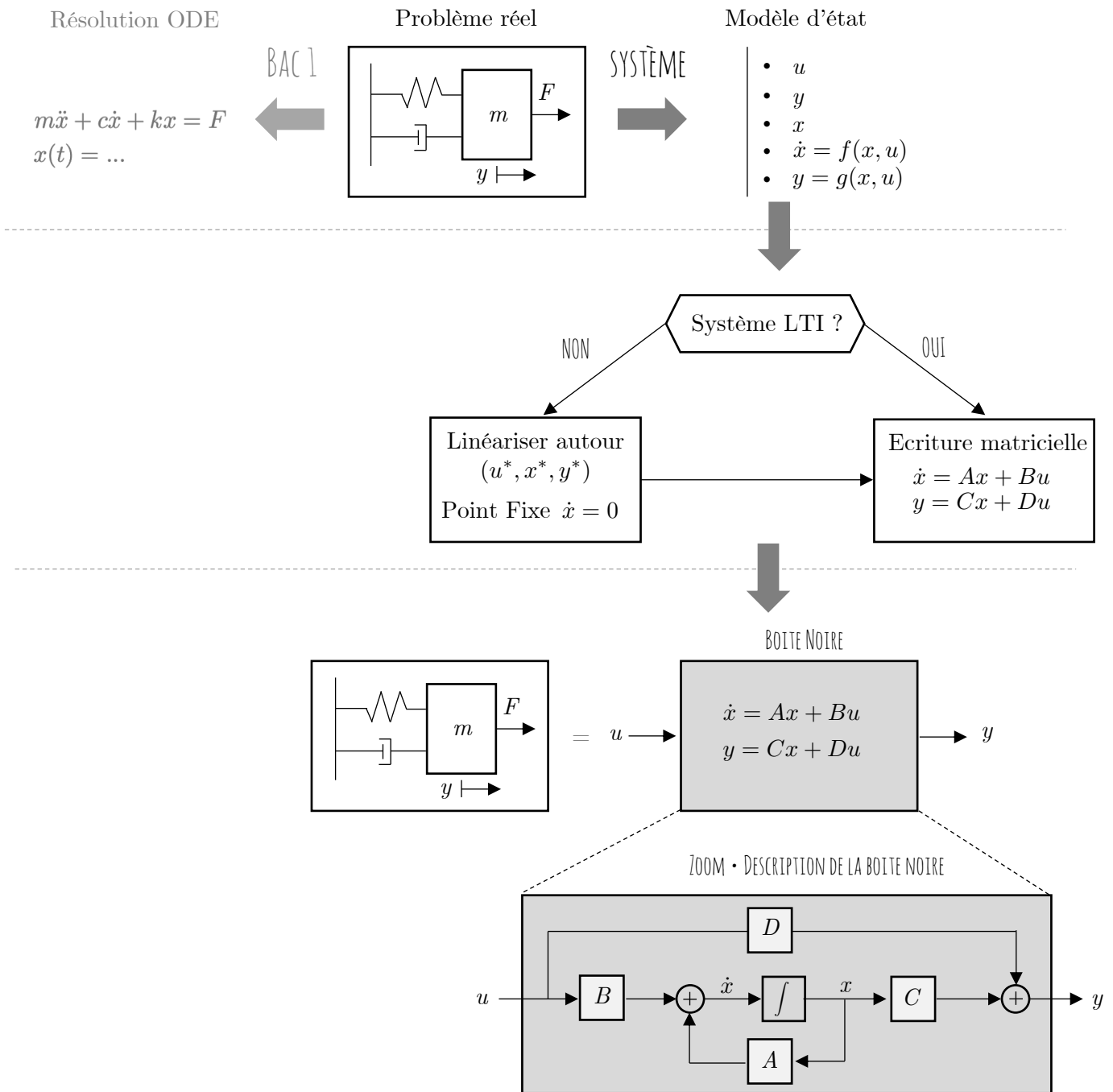
Les deux méthodes seront approfondies lors des exercices.

Notions clés

- Comprendre l'utilité de la représentation d'état
- Savoir linéariser
- La méthode des petites perturbations sera utilisée plutôt quand le système est décrit par son équation entrée-sortie. La méthode de la matrice jacobienne est plus facile lorsque l'on dispose des équations de mise à jour et de sortie.
- Construire un bloc diagramme

1. Ces notions avaient également été abordées lors du TP2 et du TP3.

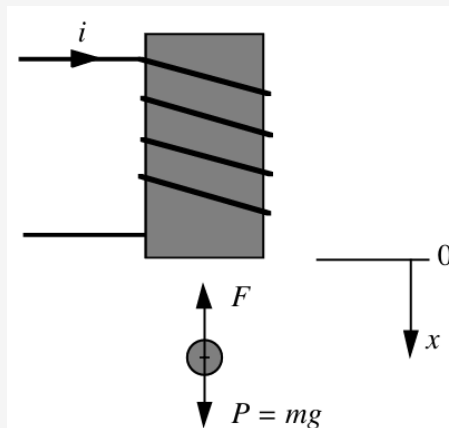
Résumé graphique



- A est appelée matrice d'état du système, de dimension $n \times n$.
- B est appelée matrice de commande du système, de dimension $n \times m$.
- C est appelée matrice de sortie du système, de dimension $p \times n$.
- D est appelée matrice de transmission directe du système, de dimension $p \times m$.

2 Exercices résolus au tableau

Exercice 1 Soit un système constitué d'une bille maintenue en lévitation dans le plan vertical par une bobine (électro-aimant).



La force électromagnétique F exercée par la bobine dépend de la distance x qui la sépare de la bille et du courant électrique (appliqué) i qui la parcourt : $F(x, i) = \frac{L}{2(1+x)^2} i^2$ où L est la différence entre l'inductance de la bobine lorsque la bille touche son noyau ($x = 0$) et celle en l'absence de bille. L'équation dynamique qui régit le mouvement de la bille est obtenue en appliquant la loi de mouvement de Newton : $m\ddot{x} = mg - F(x, i)$ où m représente la masse de la bille et g la constante de gravitation.

- (a) Proposer un modèle d'état pour représenter ce système, en choisissant la position de la bille comme sortie.
- (b) Donner le(s) modèle(s) d'état linéarisé(s) pour ce système.
- (c) Tracer le(s) bloc(s) diagramme(s) correspondant(s) au(x) modèle(s) d'état linéarisé(s) en utilisant le moins de blocs intégrateurs et symboles sommatoires possible.

Questions supplémentaires

- Est-ce que le système est LTI ?
- Que signifie LTI ? Pourquoi sommes-nous intéressé·e·s par les systèmes LTI ?

a) Modèle d'état



Sur base de l'équation entrée-sortie donnée, on remarque que le degré de dérivation temporelle le plus élevé est 2. Il faudra donc 2 variables d'état.
Voir TP précédent pour plus de détails.

b) Linéarisation du modèle d'état autour de points de fonctionnement

Un modèle d'état non linéaire sera toujours linéarisé autour d'un point de fonctionnement. Dans ce cours, on choisit en général un point d'équilibre du système comme point de fonctionnement. Une étape inévitable dans la résolution sera donc de déterminer les points d'équilibre du système.

• Méthode 1

**Schéma de résolution : linéariser selon la méthode des petites perturbations**

Dans chaque loi de mise à jour et chaque loi de sortie, il suffit de répéter les 4 étapes suivantes :

- i. Remplacer (u, x, y) par $(u^* + \delta u, x^* + \delta x, y^* + \delta y)$
- ii. Développer les termes non linéaires par Mac Laurin/Taylor en fonction de $\delta u, \delta x, \delta y$: $f(\delta x) = f(0) + f'(0)\delta x$ ou $f(x^* + \delta x) = f(x^*) + f'(x^*)\delta x$
- iii. Négliger les termes d'ordre ≥ 2 en $\delta u, \delta x, \delta y$ (et leur produit)
- iv. Compenser les termes indépendants

• Méthode 2 :

Lors du TP3, on a vu comment linéariser un système de deux équations non linéaires. Pour rappel, il suffit de calculer les points d'équilibre, de calculer la matrice jacobienne et de l'évaluer aux points d'équilibre. Ici, le système considéré est décrit à l'aide des lois de mise à jour et des lois de sortie. Il suffit d'extrapoler la méthode de la matrice jacobienne à ces lois.

Pour la loi de sortie, $g(x_1, x_2, u)$, il faut donc calculer sa dérivée par rapport à x_1 , sa dérivée par rapport à x_2 et sa dérivée par rapport à u . Il faut ensuite remplacer les signaux x_1, x_2, u par la valeur des points fixes x_1^*, x_2^*, u^* . On répète l'opération pour les lois de mise à jour.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{cases} \rightarrow \boxed{\text{linéarisation autour du point fixe}} \rightarrow \begin{cases} \delta \dot{x} = A\delta x + B\delta u \\ \delta y = C\delta x + D\delta u \end{cases}$$

Schéma de résolution : linéariser un système selon la méthode des dérivées

Résoudre les dérivées suivantes évaluées aux points fixes pour obtenir les matrices ABCD.



$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \Big|_{(x_1^*, x_2^*, u^*)} \\ B &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{pmatrix} \Big|_{(x_1^*, x_2^*, u^*)} \\ C &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix} \Big|_{(x_1^*, x_2^*, u^*)} \\ D &= \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right) \Big|_{(x_1^*, x_2^*, u^*)} \end{aligned}$$

C) Bloc diagramme avec le moins de blocs intégrateurs

Un bloc diagramme n'est pas unique. Cependant, en ajoutant une contrainte sur le nombre de blocs intégrateurs, cela restreint l'ensemble des blocs diagrammes possibles. Bien souvent, une variable d'état représente la dérivée d'une autre variable d'état. Ainsi, cette relation peut se représenter via 1 seul bloc intégrateur dans un bloc diagramme.

3 Exercices à faire**Exercice 2 = Exercice 4.11 [TXB]**

Soit le système décrit par l'équation différentielle

$$y + (\dot{y} - 2)u = u^2. \quad (1)$$

- a) Linéarisez le système autour de la solution

$$\begin{cases} y^*(t) = 2t + 1 \\ u^*(t) = \sqrt{2t + 1}. \end{cases}$$

- b) Pourquoi ce système linéarisé n'est-il pas analysable par l'ensemble des outils vus dans le cours de systèmes ?
- c) Choisissez une autre solution (u^*, y^*) du système non-linéaire telle que le système linéarisé dans le voisinage de cette solution soit un système LTI.

Question préliminaire : d'où vient la non-linéarité de cette équation ?

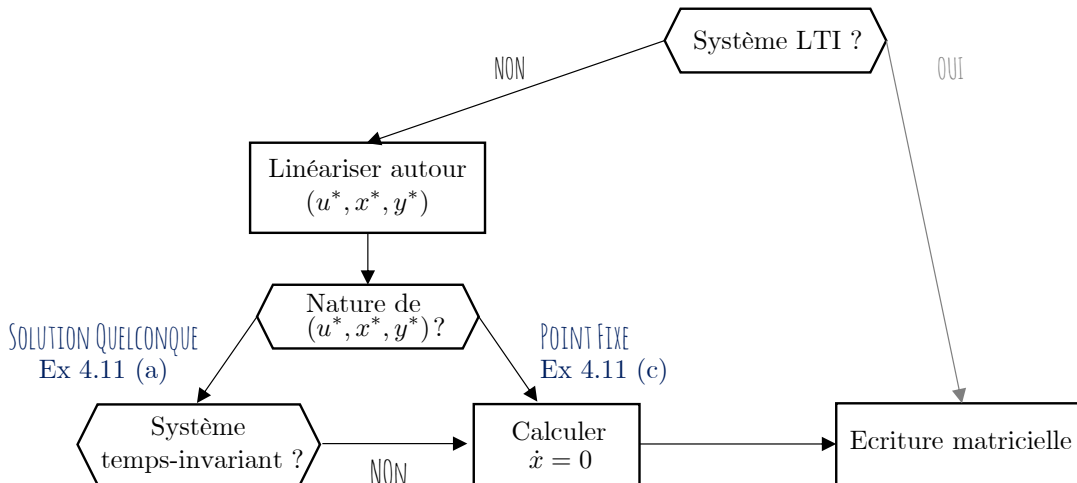


Schéma de résolution : linéariser un système autour d'une solution imposée

- a) On donne la solution autour de laquelle on veut linéariser. Les points autour desquels on veut linéariser le système sont donnés. Il suffit donc de choisir sa méthode de linéarisation. Dans cet exercice, le système est décrit par l'équation entrée-sortie. La méthode des petites perturbations s'applique très facilement car il suffit de remplacer : u par $u^* + \delta u$ et y par $y^* + \delta y$. Si on choisit la méthode des dérivées, il faut d'abord transformer l'équation entrée-sortie en modèle d'état à l'aide de variable x et ensuite calculer toutes les dérivées.
- b) Le système est-il linéaire ? Oui/Non ? Pourquoi ?
Le système est-il temps-invariant ? Oui/Non ? Pourquoi ?
- c) Pour que le système soit *LTI*, il faut linéariser autour d'un point **stationnaire**
 $\implies \dot{x} = \dot{y} = \dot{u} = 0$

- Première étape : trouver le point stationnaire :

$$y^* + (0 - 2)u^* = u^{*2} \iff y^* = u^{*2} + 2u^*$$

- Deuxième étape : linéarisation

Le système est-il linéaire ? Oui/Non ? Pourquoi ?

Le système est-il temps-invariant ? Oui/Non ? Pourquoi ?



Exercice 3 = Exercice 4.20 (suite du TP4 Ex1) [TXB]

Soit le système de pendule inversé modélisé dans le TP4 Ex1. Pour rappel, on a

$$\ddot{\theta} = \frac{u}{mL^2} - \frac{b\dot{\theta}}{mL^2} - \frac{ka^2}{mL^2} \tan \theta + \frac{g}{L} \sin \theta$$

avec $m, L, a, k \geq 0$ et le modèle d'état est

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u}{mL^2} - \frac{b}{mL^2}x_2 - \frac{ka^2}{mL^2} \tan x_1 + \frac{g}{L} \sin x_1 \\ y = x_1 \end{pmatrix}$$

- Pour $u = 0$, déterminez une condition sur les paramètres pour que le système possède trois points d'équilibre.
- Étudiez la stabilité des trois points d'équilibre sur base d'un raisonnement physique.
- Linéarisez le modèle d'état autour d'un point d'équilibre stable du système.

4 Pour s'exercer

Exercice 4 = Exercice 4.26 (suite du TP4 Ex4) [TXB]

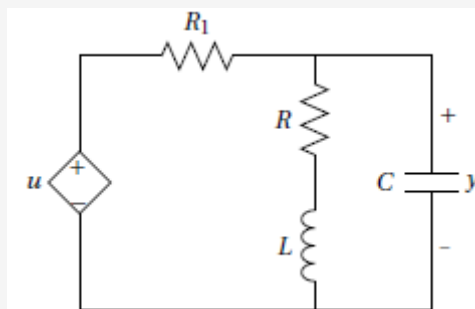
Soit le système à deux réservoirs du TP4 Ex4.

- Calculer le point de fonctionnement stationnaire (h_1^*, h_2^*) en fonction d'un débit d'entrée constant u^* .
- Linéariser le modèle d'état autour de ce point de fonctionnement.

Questions d'examens

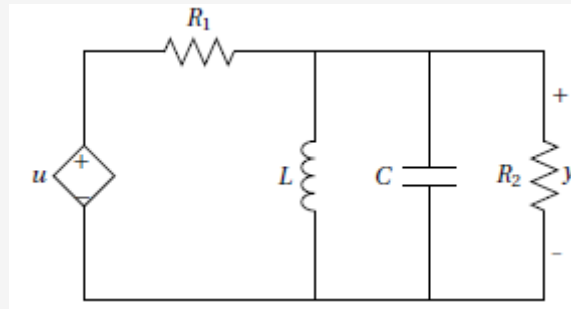
- Remarque : les années précédentes, il était demandé de trouver les lois des circuits ou d'autres systèmes physiques depuis le début. Ici, il suffit juste de mettre sous forme de modèle d'état à partir des équations associées au système.

- Juin 2016 - Q1 - (i) - (ii) (NB : dans la matrice A , la réponse est $\frac{-R}{L}$ et non $-R$)
Soit le système LTI causal représenté par le circuit électrique suivant :



L'entrée est la tension u aux bornes du générateur et la sortie est la tension y aux bornes du condensateur C . On demande

- de donner une représentation d'état sous forme de modèle (A, B, C, D) de ce système, en choisissant les accumulateurs d'énergie comme variables d'état.
 - de donner l'équation entrée-sortie du système.
- Août 2016 - Q1 - (i) - (ii) (NB : dans l'équation entrée-sortie, c'est $\dot{u}$ et non u)
Soit le système LTI représenté par le circuit électrique suivant.



L'entrée est la tension u aux bornes du générateur et la sortie est la tension y aux bornes de la résistance R_2 . On demande

- (i) de donner une représentation d'état sous forme de modèle (A,B,C,D) de ce système, en choisissant les accumulateurs d'énergie comme variables d'état.
- (ii) de donner l'équation entrée-sortie du système.

• Janvier 2017 - Q1

Nous proposons d'étudier la dynamique d'un système écologique composé uniquement de deux espèces animales, les proies et les prédateurs. Plus précisément, nous nous intéressons à l'évolution au cours du temps du nombre de proies, noté $x(t)$, et du nombre de prédateurs, noté $y(t)$, dans ce système. Pour ce faire, nous considérons les hypothèses suivantes :

- le taux de reproduction α des proies est constant ;
- plus il y a de prédateurs, plus les proies se font manger. Le taux de mortalité des proies est donc proportionnel (avec un facteur β) au nombre de prédateurs dans le système ;
- le taux de mortalité γ des prédateurs est constant ;
- plus il y a de proies, plus il y a à manger pour les prédateurs et plus les prédateurs se reproduisent. Le taux de reproduction des prédateurs est donc proportionnel (avec un facteur δ) au nombre de proies dans le système.

(i) Modélisez le système proie-prédateur via les deux équations différentielles décrivant l'évolution de $x(t)$ et $y(t)$ en fonction du temps.

(ii) Ce système est non-linéaire. Expliquez pourquoi.

(iii) Quels sont les points d'équilibre du système ?

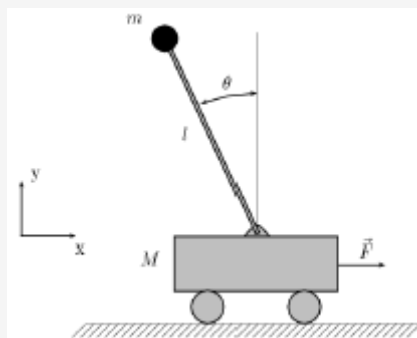
(iv) Linéarisez le système autour des points de fonctionnement obtenus ci-dessus.

(v) Etudiez la stabilité des points d'équilibre du système.

• Août 2017 - Q1 + Q2 - (i) - (ii)

Q1 :

Nous proposons d'étudier la dynamique d'un *segway*. Son comportement peut être modélisé par celui du pendule inversé suivant :



Afin de mener à bien la modélisation, les hypothèses suivantes sont considérées :

- le pendule de masse m est suspendu à une tige rigide de longueur l et de masse négligeable ;
- θ est l'angle d'inclinaison du pendule par rapport à la verticale ;
- le pendule reste toujours en position "haute" tel que $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$;
- le chariot est de masse M et soumis à une force F ;
- la position du chariot est notée x ;

- g dénomine l'accélération de la pesanteur.

Les équations du mouvement sont alors données par

$$(M + m)\ddot{x} - m\ddot{\theta} \cos \theta + m\dot{\theta}^2 \sin \theta = F$$

$$l\ddot{\theta} - \ddot{x} \cos \theta = g \sin \theta$$

- Décrivez le signal d'entrée et les variables d'état du système (donnez les domaine et image des signaux également).
- Ce système est non-linéaire. Expliquez pourquoi.
- Calculez le(s) point(s) d'équilibre de ce système et discutez leur stabilité.
- Linéarisez le système autour du point de fonctionnement suivant : $(\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x}) = (0, 0, 0, 0)$ et $F = 0$.
- Donnez la représentation d'état (A,B,C,D) du système linéarisé. La sortie du système est le mouvement horizontal du chariot.
- Donnez un bloc diagramme pour ce système linéarisé.

Q2 :

Soit le système LTI causal décrit par l'équation différentielle $\ddot{y} - y = \ddot{u} + 2\dot{u} + u$

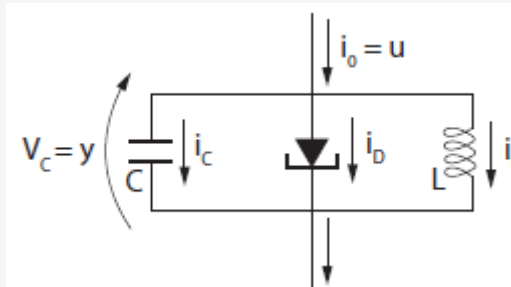
- Donnez une représentation d'état (A,B,C,D) du système. Pour ce faire, utilisez la méthode des variables auxiliaires avec $x(t) = (v(t), \dot{v}(t))^T$.
- Déduisez-en le bloc-diagramme correspondant.

- Janvier 2018 - Q1

(NB : il manque un $\frac{1}{C}$ à l'équation (4))

Q1 :

L'oscillateur de Van der Pol est un système dynamique qui a une grande importance en théorie des systèmes. Il peut être réalisé par un circuit électrique comprenant une inductance (L), une capacité (C) et une diode à effet tunnel en parallèle :



Le courant dans la diode à effet tunnel i_D est fonction de la différence de potentiel V_D suivant la relation

$$i_D = V_D^3 - \alpha V_D, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

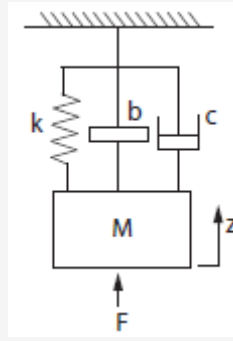
On considère le courant i_0 comme entrée du système et la différence de potentiel autour de la capacité V_C comme sortie.

- Décrivez la dynamique du système sous forme d'équation(s) différentielle(s) ordinaire(s).
- Le système est-il linéaire ? Le système est-il temps-invariant ? Calculez se(s) point(s) d'équilibre pour une entrée nulle (on considérera une entrée nulle pour le reste de la question).
- Si le système est linéaire, donnez une représentation d'état (A, B, C, D). Si le système est non linéaire, linéarisez le système autour de chaque point fixe et donnez une représentation d'état pour chacun d'eux (A, B, C, D).
- Pour un des systèmes linéarisés (au choix), déterminez les valeurs du paramètre α pour lesquelles le système est
 - stable et de réponse impulsionnelle monotone.
 - stable et de réponse impulsionnelle oscillatoire.
 - instable et de réponse impulsionnelle monotone.
 - instable et de réponse impulsionnelle oscillatoire.

- Août 2018 - Q1

(NB : sauf le point (v))

La suspension d'un véhicule peut être approximée par un modèle mécanique composé d'une masse (M), d'un ressort (k), d'un amortisseur (c) et d'un inerte (b).

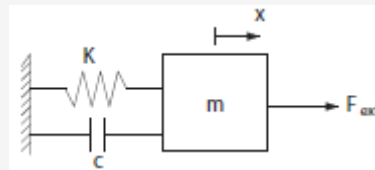


L'inerteur est un composant très léger qui a été conçu pour obéir à la loi $F = b \frac{dv}{dt}$ où v est la vitesse de déplacement relative entre ses deux extrémités. Pour ce modèle, on demande

- (i) de définir les signaux d'entrée et de sortie, ainsi que leur domaine et leur image.
- (ii) d'écrire l'équation entrée/sortie du système (on néglige l'effet de la pesanteur sur la masse).
- (iii) de proposer une représentation d'état du système (matrices A,B,C,D) et de discuter la stabilité du système.
- (iv) de calculer le point d'équilibre du système en fonction de l'entrée F .
- (vi) de proposer une relation entre les différents paramètres M , b , c et k qui aboutit à une réponse stable et oscillatoire.

- Janvier 2019 - Q1

Un amortisseur de voiture peut-être étudié à l'aide d'un modèle mécanique composé d'une masse (m), d'un ressort (K) et d'un amortisseur (c) :



x correspond au déplacement de la masse, F_{ext} à la force extérieure appliquée sur la masse et $c \in \mathbb{R}^+$ est une constante d'amortissement. La masse peut se déplacer sans frottement.

Le ressort K obéit à la loi : $K = k_1 x + k_2 x^3$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ où k_1, k_2 sont des constantes de raideur. Pour ce modèle, on demande de

- (i) Donner les signaux d'entrée, de sortie et les variables d'états, en spécifiant leur domaine et image.
- (ii) Donner les lois de sortie et de mise à jour.
- (iii) Le système est-t-il temps-invariant ? Justifier.
- (iv) Le système est-t-il linéaire ? Justifier.

Si oui, donner une représentation d'état (A,B,C,D).

Si non,

- Calculer (tous) le(s) point(s) d'équilibre(s) pour une force extérieure appliquée nulle ($F_{ext} = 0$) et discuter leur existence en fonction des valeurs des paramètres k_1, k_2 .
- Linéariser le système autour du (de chaque) point d'équilibre.
- Donner une représentation d'état (A,B,C,D) pour le(s) système(s) linéarisé(s).

- (v) Étudier la stabilité en fonction des paramètres k_1, k_2 . Préciser si la réponse est monotone ou oscillatoire.
- (vi) Tracer la position d'équilibre du chariot en fonction du paramètre k_1 pour ($k_2 > 0$). Tracer le trait en pointillé pour une position instable et en trait normal pour une position stable ou marginalement stable.

TP5

Remarque : Les modèles d'état et bloc-diagrammes associés à un système ne sont pas uniques (cf. rappel théorique). Nous présentons ici une seule possibilité, qui nous semble être la plus directe, pour chaque exercice. Les autres possibilités sont toutes équivalentes à cette première moyennant un changement de variable, que l'étudiant pourra rechercher explicitement (matrice T du rappel théorique du TP4) en cas de doute.

Exercice 1

(a) Modèle d'état (non linéaire)

Soient $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$ nos états, i.e. la position (x_1) et la vitesse de la bille (x_2). L'entrée u est le courant appliqué i et notre sortie y est la position de la bille $x_1 = x$ comme indiqué dans l'énoncé. Notre modèle d'état est alors :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ g - \frac{L}{2m} \frac{u^2}{(1+x_1)^2} \end{pmatrix} \\ y = x_1. \end{cases}$$

Il est à noter que ce modèle d'état est non linéaire au vu de u^2 , $\frac{1}{(1+x_1)^2}$ et du produit entre ces 2 éléments.

(b) Il nous faut linéariser $h(x_1, u) = \frac{u^2}{(1+x_1)^2}$.

— Méthode des petites perturbations :

Soient $x_1 = x_1^* + \delta x_1$, $x_2 = x_2^* + \delta x_2$, $u = u^* + \delta u$. Par Taylor, on a :

$$\begin{aligned} h(x_1, u) &\approx h(x_1^*, u^*) + \left. \frac{\partial h(x_1, u)}{\partial x_1} \right|_{(x_1^*, u^*)} \delta x_1 + \left. \frac{\partial h(x_1, u)}{\partial u} \right|_{(x_1^*, u^*)} \delta u \\ &\quad + \mathcal{O}((\delta x)^2, (\delta u)^2, \delta x \delta u, \delta u \delta x) \\ &\approx (1 + x_1^*)^{-2} u^{*2} + u^{*2} (-2)(1 + x_1^*)^{-3} \delta x_1 + (1 + x_1^*)^{-2} 2u^* \delta u \\ &\quad + \mathcal{O}((\delta x)^2, (\delta u)^2, \delta x \delta u, \delta u \delta x), \end{aligned}$$

où x_1^* est donné par le(s) PF(s). On trouve $\dot{x}_1 = 0 = \dot{x}_2 \Leftrightarrow x_2^* = 0$ et $x_1^* = \pm u^* \sqrt{\frac{L}{2mg}} - 1$.

En injectant la linéarisation et les valeurs des PFs dans le modèle d'état non linéaire du point (a), on trouve :

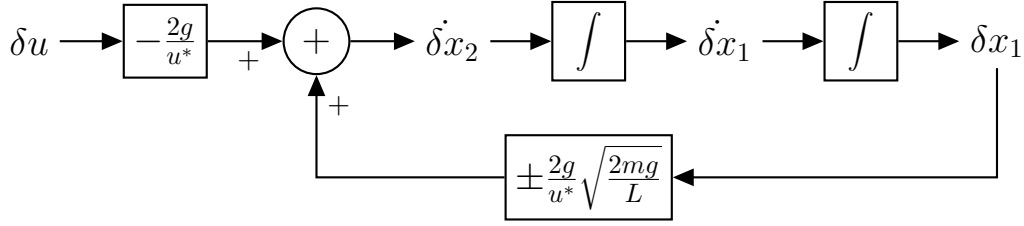
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{(x_1^* + \delta x_1)} \\ \dot{(x_2^* + \delta x_2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm 2 \frac{g}{u^*} \sqrt{\frac{2mg}{L}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2g}{u^*} \end{pmatrix} \delta u \\ \delta y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} + (0) \delta u. \end{cases}$$

— Méthode des dérivées :

$$\begin{aligned} A &= \left. \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \right|_{(x_1^*, x_2^*, u^*)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{Lu^{*2}}{2m} (-2) \frac{1}{(1+x_1^*)^3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm \frac{2g}{u^*} \sqrt{\frac{2mg}{L}} & 0 \end{pmatrix} \\ B &= \left. \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{pmatrix} \right|_{(x_1^*, x_2^*, u^*)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{L}{2m} 2 \frac{u^*}{(1+x_1^*)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2g}{u^*} \end{pmatrix} \\ C &= \left. \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix} \right|_{(x_1^*, x_2^*, u^*)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \\ D &= \left. \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} \end{pmatrix} \right|_{(x_1^*, x_2^*, u^*)} = (0) \end{aligned}$$

On retrouve bien les mêmes matrices que pour la méthode des petites perturbations.

(c) Les blocs diagrammes associés aux modèles linéaires sont :



Exercice 2 = Exercice 4.11 [TXB]

Rappel énoncé : $y + (\dot{y} - 2)u = u^2$

a) Linéariser autour d'une solution quelconque donnée :

On pose $y = y^* + \delta y$ et $u = u^* + \delta u$. On trouve alors

$$\dot{y} = \dot{y}^* + \delta \dot{y} = (2t + 1) + \delta \dot{y} = 2 + \delta \dot{y}$$

(! ne pas oublier de dériver la solution QUELCONQUE!) et

$$u^2 = (u^* + \delta u)^2 = (u^*)^2 + (\delta u)^2 + 2u^* \delta u.$$

En remplaçant dans l'équation différentielle, on trouve :

$$\begin{aligned} (y^* + \delta y) + (\dot{y} + \delta \dot{y} - 2)(u^* + \delta u) &= (u^*)^2 + (\delta u)^2 + 2u^* \delta u \\ 2t + 1 + \delta y + \underbrace{\delta \dot{y}(\sqrt{2t+1} + \delta u)}_{\sqrt{2t+1}\delta \dot{y} + \delta \dot{y}\delta u} &= 2t + 1 + (\delta u)^2 + 2\sqrt{2t+1}\delta u. \end{aligned}$$

En négligeant les termes non-linéaires de second ordre et en simplifiant les termes égaux dans chaque membre, l'équation différentielle linéarisée est :

$$\sqrt{2t+1}\delta \dot{y} + \delta y = 2\sqrt{2t+1}\delta u \dots$$

b) Pourquoi l'équation linéarisée n'est pas analysable avec les nouveaux outils développés ? Parce que ce système est temps-variant, alors que nous considérons particulièrement les systèmes LTI.

c) Choix de (u^*, y^*) pour que le système linéarisé soit LTI ? On aimerait choisir une solution où u^* et y^* sont constants, *i.e.* $\dot{y} = 0$. On obtient alors $y^* = (u^*)^2 + 2u^*$. À nouveau, on pose $y = y^* + \delta y$ et $u = u^* + \delta u$. On trouve alors $\dot{y} = \dot{y}^* + \delta \dot{y} = \delta \dot{y}$ et $u^2 = (u^* + \delta u)^2 = (u^*)^2 + (\delta u)^2 + 2u^* \delta u$. En remplaçant dans l'équation différentielle de départ, on a

$$\begin{aligned} (y^* + \delta y) + (\delta \dot{y} - 2)(u^* + \delta u) &= (u^*)^2 + (\delta u)^2 + 2u^* \delta u \\ ((u^*)^2 + 2u^* + \delta y) + \delta \dot{y}(u^* + \delta u) &= (u^*)^2 + (\delta u)^2 + 2u^* \delta u + 2\delta u + 2u^* \end{aligned}$$

En négligeant les termes non-linéaires de second ordre et en simplifiant les termes égaux dans chaque membre, l'équation différentielle linéarisée est :

$$u^* \delta \dot{y} + \delta y = (2u^* + 2)\delta u.$$

Exercice 3 = Exercice 4.20 [TXB]

a) Les PFs sont déterminés par $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$. Ainsi, on trouve $x_2^* = 0$ et $\sin x_1 \left[\frac{g}{L} - \frac{ka^2}{mL^2} \frac{1}{\cos x_1} \right] = 0$. Si on résout cette dernière équation, on trouve :

$$\begin{aligned} \sin x_1 = 0 \quad \text{OU} \quad \frac{g}{L} &= \frac{ka^2}{mL^2} \frac{1}{\cos x_1} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_1^* = \pi \\ x_1^* = -\pi \end{cases} \quad \text{OU} \quad \cos x_1 &= \frac{ka^2}{mLg} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* = \arccos \frac{ka^2}{mLg} \\ x_1^* = -\arccos \frac{ka^2}{mLg} \end{cases} \end{aligned}$$

Pour $-\pi < -\theta_{max} < 0 < \theta_{max} < \pi$, les PFs $(\theta, \dot{\theta}) = (x_1, x_2)$ sont donc $(0, 0); (\arccos \frac{ka^2}{mLg}, 0); (-\arccos \frac{ka^2}{mLg}, 0)$ si et seulement si $\frac{a}{L} < \frac{ka^2}{mLg} < 1$

b) Pour déterminer la stabilité de chaque point fixe, il faut calculer les valeurs propres de

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{ka^2}{mL^2 \cos^2 x_1} + \frac{g}{L} \cos x_1 & -\frac{b}{mL^2} \end{pmatrix}.$$

Pour $\theta = x_1 = 0$, on a :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{ka^2}{mL^2} + \frac{g}{L} & -\frac{b}{mL^2} \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{\frac{-b}{mL^2} \pm \sqrt{\left(\frac{-b}{mL^2}\right)^2 - 4\left(\frac{ka^2}{mL^2} - \frac{g}{L}\right)}}{2}.$$

Si $\frac{a}{L} < \frac{ka^2}{mLg} < 1$, alors l'argument de la racine carrée est positif. Une valeur propre est donc positive et l'autre négative $\Rightarrow$ ce PF est un point de selle et donc instable. (Si $\frac{a}{L} < \frac{ka^2}{mLg} > 1$, alors le PF est un point stable ou une spirale stable selon les valeurs exactes des paramètres.)

Pour les 2 autres PFs, on a :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{ka^2}{mL^2} \left[1 - \left(\frac{mLg}{ka^2}\right)^2\right] & -\frac{b}{mL^2} \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{\frac{-b}{mL^2} \pm \sqrt{\left(\frac{-b}{mL^2}\right)^2 - 4\frac{ka^2}{mL^2} \left[\left(\frac{mLg}{ka^2}\right)^2 - 1\right]}}{2}.$$

Puisque $\frac{ka^2}{mLg} < 1$, ces PFs sont stables (noeud ou spirale selon les valeurs de paramètres).

c) En linéarisant autour de $(\pm \arccos \frac{ka^2}{mLg}, 0)$ et en considérant $\bar{x} = x - x^*$ comme un vecteur colonne, on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{a^2k}{mL^2} \left(1 - \left(\frac{mgL}{a^2k}\right)^2\right) & \frac{-b}{mL^2} \end{bmatrix} \bar{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{bmatrix} \bar{u}(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \bar{u}(t). \end{aligned}$$

Exercice 4 = Exercice 4.26 [TXB]

a) $h_1^* = \left(\frac{u^*}{\alpha}\right)^2$ et $h_2^* = \left(\frac{2u^*}{\alpha}\right)^2$

b) Remplaçant les variables $u(t)$, $y(t)$ et $x(t)$ par leurs variations aux voisinages du point de fonctionnement stationnaire ($\bar{u}(t) = u(t) - q_i^*$, $\bar{y}(t) = y(t) - \alpha\sqrt{h_2^*}$, $\bar{x}_1(t) = x_1(t) - h_1^*$, $\bar{x}_2(t) = x_2(t) - h_2^*$) on obtient

- loi de sortie : $\bar{y} = \frac{\alpha}{2\sqrt{h_2^*}} \bar{x}_2$
- mise à jour de l'état :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \frac{1}{\gamma} \left(\bar{u} - \frac{\alpha}{2\sqrt{h_1^*}} \bar{x}_1 \right) \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \frac{1}{\gamma} \left(\bar{u} + \frac{\alpha}{2\sqrt{h_1^*}} \bar{x}_1 - \frac{\alpha}{2\sqrt{h_2^*}} \bar{x}_2 \right) \end{aligned}$$

Résolution complète

(a) On a

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 & \implies h_1^* = \left(\frac{u^*}{\alpha}\right)^2 \\ \dot{x}_2 = 0 & \implies h_2^* = \left(\frac{2u^*}{\alpha}\right)^2 \end{cases}$$

suivi de,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 & \iff 0 = \frac{1}{\gamma} u^* - \frac{\alpha}{\gamma} \sqrt{h_1^*} & \iff u^* = \alpha \sqrt{h_1^*} & \iff h_1^* = \left(\frac{u^*}{\alpha}\right)^2 \\ \dot{x}_2 = 0 & \iff 0 = u^* + \alpha \sqrt{h_1^*} - \alpha \sqrt{h_2^*} & \iff \sqrt{h_2^*} = \frac{2u^*}{\alpha} & \iff h_2^* = \left(\frac{2u^*}{\alpha}\right)^2 \end{cases}$$

et la sortie

$$y^* = \alpha \sqrt{h_2^*}$$

Le point de fonctionnement stationnaire (u^*, x^*, y^*) (avec $x^* = (h_1^*, h_2^*)^T$) est donc

$$\left(u^*, \begin{pmatrix} \left(\frac{u^*}{\alpha} \right)^2 \\ \left(\frac{2u^*}{\alpha} \right)^2 \end{pmatrix}, \alpha \sqrt{h_2^*} \right)$$

(b) Méthode 1

Résolution complète

Loi de sortie :

- i. Remplacer (u, x, y) par $(u^* + \delta u, x^* + \delta x, y^* + \delta y)^2$:

$$y = \alpha \sqrt{x_2} \longrightarrow y^* + \delta y = \alpha \sqrt{x_2^* + \delta x_2}$$

- ii. Développer les termes non-linéaires par Mac Laurin en fonction de $\delta u, \delta x, \delta y$:

Ici, le terme non-linéaire en δx_2 est $\sqrt{x_2^* + \delta x_2}$:

$$f(\delta x_2) = \alpha \sqrt{x_2^* + \delta x_2} \sim \alpha \sqrt{x_2^*} + \frac{\alpha}{2\sqrt{x_2^*}} \delta x_2$$

- iii. Négliger les termes d'ordre ≥ 2 en $\delta u, \delta x, \delta y$:

Ici rien à faire, mais il aurait pu y avoir $\delta x \delta u, (\delta x)^2, \dots$

$$y^* + \delta y = \alpha \sqrt{x_2^*} + \frac{\alpha}{2\sqrt{x_2^*}} \delta x_2$$

- iv. Compenser les termes indépendants :

(Utiliser les résultats du point a).

$$y^* + \delta y = \alpha \sqrt{x_2^*} + \frac{\alpha}{2\sqrt{x_2^*}} \delta x_2$$

Notre loi de sortie est donc maintenant bien linéaire en $\delta u, \delta x, \delta y$

$$\boxed{\delta y = \frac{\alpha}{2\sqrt{x_2^*}} \delta x_2 = \frac{\alpha}{2\sqrt{h_2^*}} \delta x_2}$$

Loi de mise à jour (1) :

- i. Remplacer (u, x, y) par $(u^* + \delta u, x^* + \delta x, y^* + \delta y)$:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{\gamma} u - \frac{\alpha}{\gamma} \sqrt{x_1} \longrightarrow \dot{x}_1^* + \delta \dot{x}_1 = \frac{1}{\gamma} (u^* + \delta u) - \frac{\alpha}{\gamma} \sqrt{x_1^* + \delta x_1}$$

Sachant que $\dot{x}_1^* = 0$, puisqu'il s'agit de la dérivée du point stationnaire qui ici est bien un nombre)

- ii. Développer les termes non-linéaires par Mac Laurin en fonction de $\delta u, \delta x, \delta y$:

$$\sqrt{x_1^* + \delta x_1} \sim \sqrt{x_1^*} + \frac{1}{2\sqrt{x_1^*}} \delta x_1$$

- iii. Négliger les termes d'ordre ≥ 2 en $\delta u, \delta x, \delta y$:

Ici rien à faire.

2. Au TP1, la petite perturbation était notée u et v mais afin de ne pas confondre avec la variable d'entrée et sortie, elle est remplacée par δx_1 et δx_2 .

- iv. Compenser les termes indépendants :
Utiliser les résultats du point a)

$$\delta \dot{x}_1 = \cancel{\frac{1}{\gamma} u^*} + \frac{1}{\gamma} \delta u - \cancel{\frac{\alpha}{\gamma} \sqrt{x_1^*}} - \frac{\alpha}{2\gamma \sqrt{x_1^*}} \delta x_1$$

Notre loi de mise à jour (1) est donc maintenant bien linéaire en δu , δx , δy

$$\boxed{\delta \dot{x}_1 = \frac{1}{\gamma} \delta u - \frac{\alpha}{2\gamma \sqrt{h_1^*}} \delta x_1}$$

Loi de mise à jour (2) :

i.

$$\underbrace{\dot{x}_2^*}_{=0} + \delta \dot{x}_2 = \frac{1}{\gamma} (u^* + \delta u) + \frac{\alpha}{\gamma} \sqrt{x_1^* + \delta x_1} - \frac{\alpha}{\gamma} \sqrt{x_2^* + \delta x_2}$$

ii.

$$\sqrt{x_i^* + \delta x_i} \sim \sqrt{x_i^*} + \frac{1}{2\sqrt{x_i^*}} \delta x_i \quad i \in \{1, 2\}$$

iii. /

iv.

$$\delta \dot{x}_2 = \cancel{\frac{1}{\gamma} u^*} + \frac{1}{\gamma} \delta u + \cancel{\frac{\alpha}{\gamma} \sqrt{x_1^*}} + \frac{\alpha}{2\gamma \sqrt{x_1^*}} \delta x_1 - \cancel{\frac{\alpha}{\gamma} \sqrt{x_2^*}} - \frac{\alpha}{2\gamma \sqrt{x_2^*}} \delta x_2$$

Notre loi de mise à jour (2) est donc maintenant bien linéaire en δu , δx , δy

$$\boxed{\delta \dot{x}_2 = \frac{1}{\gamma} \delta u + \frac{\alpha}{2\gamma \sqrt{h_1^*}} \delta x_1 - \frac{\alpha}{2\gamma \sqrt{h_2^*}} \delta x_2}$$

À faire : écrire la loi de sortie et celles de mise à jour sous forme matricielle (c'est-à-dire déterminer les matrices A , B , C , D) : c'est le *modèle d'état du système linéarisé* autour du point d'équilibre considéré !

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} + B \delta u$$

$$\delta y = C \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} + D \delta u$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2\gamma \sqrt{h_1^*}} & 0 \\ \frac{\alpha}{2\gamma \sqrt{h_1^*}} & -\frac{\alpha}{2\gamma \sqrt{h_2^*}} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} \\ \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha}{2\gamma \sqrt{x_2^*}} \end{pmatrix} \quad D = (0)$$

Méthode 2

Résolution complète

Loi de sortie :

$$y = g(x_1, x_2, u) \rightarrow \delta y = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) \Big|_{(x_1^*, x_2^*, u^*)} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} + \frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{(x_1^*, x_2^*, u^*)} \delta u$$

Loi de mise à jour (1) :

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u) \rightarrow \delta \dot{x}_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) \Big|_{(x_1^*, x_2^*, u^*)} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} + \frac{\partial f_1}{\partial u} \Big|_{(x_1^*, x_2^*, u^*)} \delta u$$

Loi de mise à jour (2) :

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u) \rightarrow \delta \dot{x}_2 = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \Big|_{(x_1^*, x_2^*, u^*)} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} + \frac{\partial f_2}{\partial u} \Big|_{(x_1^*, x_2^*, u^*)} \delta u$$

Matriciellement, on peut écrire les équations précédentes :

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \Big|_{(x_1^*, x_2^*, u^*)} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{pmatrix} \Big|_{(x_1^*, x_2^*, u^*)} \delta u$$

$$\delta y = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix} \Big|_{(x_1^*, x_2^*, u^*)} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} + \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right) \Big|_{(x_1^*, x_2^*, u^*)} \delta u$$

On trouve

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \Big|_{(x_1^*, x_2^*, u^*)} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2\gamma\sqrt{h_1^*}} & 0 \\ \frac{\alpha}{2\gamma\sqrt{h_1^*}} & -\frac{\alpha}{2\gamma\sqrt{h_2^*}} \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{pmatrix} \Big|_{(x_1^*, x_2^*, u^*)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} \\ \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix} \Big|_{(x_1^*, x_2^*, u^*)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha}{2\sqrt{x_2^*}} \end{pmatrix} \\ D &= \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right) \Big|_{(x_1^*, x_2^*, u^*)} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour conclure : La dynamique du système global est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

Si le système est non-linéaire, on linéarise autour de points fixes afin de rendre les lois de mise à jour et de sortie linéaires. On peut donc écrire les lois à l'aide des matrices A,B,C,D :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Exercice 5 Juin 2016

(i) On a par la loi des mailles que

$$y = v_C = v_{RL} = u - v_{R_1} = v_R + v_L$$

et par la loi des nœuds que

$$i_{RL} = i_{R_1} - i_C.$$

Enfin les lois des composantes nous donnent :

$$i_{R_1} = \frac{u - y}{R_1}, \quad v_L = Li'_{RL}, \quad i_C = Cy'.$$

Les variables d'état sont les accumulateurs d'énergie, à savoir v_C (le potentiel aux bornes de la capacité) et i_L (courant dans la bobine). Nous déduisons les relations de mise à jour suivantes :

$$\begin{aligned} v'_C &= \frac{1}{C}i_C = \frac{1}{C} \left(\frac{u - v_C}{R_1} - i_L \right), \\ i'_L &= \frac{1}{L}v_L = \frac{1}{L} (v_C - Ri_L). \end{aligned}$$

Et la sortie est donnée par $y = v_C$. En considérant comme vecteur d'état $x = (v_C, i_L)$, le modèle d'état correspondant est donné par

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -R \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C} \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, D = 0.$$

(ii)

$$\begin{aligned} y &= Ri_L + Li'_L = R \left(\frac{u - y}{R_1} - Cy' \right) + L \left(\frac{u' - y'}{R_1} - Cy'' \right), \\ LCy'' + \left(\frac{L}{R_1} + CR \right) y' + \left(\frac{R}{R_1} + 1 \right) y &= \frac{L}{R_1} u' + \frac{R}{R_1} u. \end{aligned}$$

Exercice 6 Août 2016

(i) On a par la loi des mailles que

$$y = v_C = x_1 = v_{RL}$$

et par la loi des nœuds que

$$i_C = i_{R_1} - i_{R_2} - i_L.$$

Enfin, les lois des composants nous donnent

$$i_{R_1} = \frac{u - y}{R_1}, i_{R_2} = \frac{y}{R_2}, v_L = Li'_L, i_C = Cy'.$$

Les variables d'état sont les accumulateurs d'énergie, à savoir v_C (le potentiel aux bornes de la capacité) et i_L (courant dans la bobine). Nous déduisons les relations de mise à jour suivantes :

$$\begin{aligned} v'_C &= \frac{1}{C}i_C = \frac{1}{C} \left(\frac{u - v_C}{R_1} - \frac{v_C}{R_2} - i_L \right), \\ i'_L &= \frac{1}{L}v_L = \frac{1}{L}v_C. \end{aligned}$$

La sortie est donnée par $y = v_C$. En considérant comme vecteur d'état $x = (v_C, i_L)$, le modèle d'état correspondant est donné par

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C} - \frac{1}{R_2 C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C} \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, D = 0.$$

(ii)

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{C} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) y - \frac{1}{C} x_2 + \frac{1}{R_1 C} u, \\ y'' + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) y' + \frac{1}{LC} y &= \frac{1}{R_1 C} u. \end{aligned}$$

Exercice 7 Janvier 2017

(i)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - \beta xy, \\ \dot{y} &= \delta xy - \gamma y. \end{aligned}$$

- (ii) À cause du produit xy .
- (iii) Les points d'équilibre du système correspondent aux valeurs de x et y solutions du système obtenues pour $\dot{x} = \dot{y} = 0$.

On trouve donc comme solutions :

- PF1 : $(x^*, y^*) = (0, 0)$,
- PF2 : $(x^*, y^*) = (\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$.

- (iv) Soient Δx et Δy des petites perturbations autour de la position d'équilibre (x^*, y^*) , on injecte

$$\begin{aligned}x &\rightarrow x^* + \Delta x, \\y &\rightarrow y^* + \Delta y\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\dot{x} &\rightarrow \Delta \dot{x}, \\ \dot{y} &\rightarrow \Delta \dot{y}\end{aligned}$$

dans le système.

Dès lors, on obtient (en négligeant les termes d'ordre 2)

- en $(0, 0)$:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x} &= \alpha \Delta x, \\ \Delta \dot{y} &= -\gamma \Delta x,\end{aligned}$$

- en $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x} &= -\beta \frac{\gamma}{\delta} \Delta x, \\ \Delta \dot{y} &= \delta \frac{\alpha}{\beta} \Delta x.\end{aligned}$$

Le même résultat peut être obtenu en dérivant

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

où J est la matrice jacobienne du système (évaluée au point fixe concerné) :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x} & \frac{\partial f_x}{\partial y} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} & \frac{\partial f_y}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & -\gamma + \delta x \end{pmatrix}.$$

- (v) La stabilité de chaque point d'équilibre est déterminée par le signe des valeurs propres de la matrice jacobienne évaluée en ces points.

En $(0, 0)$: $\lambda_1 = \alpha$ et $\lambda_2 = -\lambda$, le point est instable (point de selle).

En $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$: $\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{\gamma\alpha}$, le point est marginalement stable.

Exercice 8 Août 2017

Question 1

- (i) — Entrée : $F, \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

— Variables d'état :

- Position horizontale du chariot $x, \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.
- Vitesse horizontale du chariot $\dot{x}, \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.
- Position angulaire du pendule $\theta, \mathbb{R}^+ \rightarrow (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- Vitesse angulaire du pendule $\dot{\theta}, \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

- (ii) Fonctions non linéaires de θ , de $\dot{\theta}$ et produits de variables d'état.

- (iii) Pour ce faire, on considère $\dot{\theta} = \dot{x} = \ddot{\theta} = \ddot{x} = 0$. On trouve donc $\theta = 0$ et $u = 0$. Dès lors, $x = 0$ aussi. Point d'équilibre instable.
- (iv) Selon la méthode des petites perturbations, on trouve $\cos \theta \approx 1$ et $\sin \theta \approx \theta$. Dès lors, on a

$$(M + m)\delta\ddot{x} - ml\delta\ddot{\theta} = \delta u,$$

$$l\delta\ddot{\theta} - \delta\ddot{x} = g\delta\theta.$$

- (v) Soit le vecteur d'état $(\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x})^T$, on obtient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{M+m}{M} \frac{g}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{m}{M} g & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = 0.$$

- (vi)

Question 2

- (i) On introduit les variables intermédiaire $v(t)$ et $\dot{v}(t)$ telles que

$$\ddot{v} - v = u,$$

$$\ddot{v} + 2\dot{v} + v = y.$$

Dès lors, en prenant $x(t) = (v(t), \dot{v}(t))^T$ comme vecteur d'état, on trouve le modèle d'état suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}, D = 1.$$

- (ii) Bloc diagramme avec deux blocs de dérivation en série.

Exercice 9 Janvier 2018

- (i)

$$i_C + i_D + i_L = u$$

$$\iff C \frac{dV}{dt} + (V^3 - \alpha V) + \frac{1}{L} \int V dt = u.$$

En dérivant chaque membre, on obtient

$$C\ddot{V} + (3V^2 - \alpha)\dot{V} + \frac{1}{L}V = \dot{u}$$

$$\iff \ddot{V} + \frac{1}{C}(3V^2 - \alpha)\dot{V} + \frac{1}{LC}V = \dot{u}.$$

- (ii) Non-linéaire (terme en $V^2\dot{V}$), temps-invariant car aucun paramètre ne dépend du temps. On choisit les variables d'état $x_1 = V, x_2 = \dot{V}$, ce qui donne

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (= f_2)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}(\alpha - 3x_1^2)x_2 - \frac{1}{LC}x_1 \quad (= f_1).$$

On calcule les points d'équilibre en résolvant le système d'équations pour $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$, ce qui donne le point $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$.

- (iii) Système non linéaire, calcul de la matrice jacobienne évalué au point fixe pour la linéarisation :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \bigg|_{(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & \frac{\alpha}{C} \end{pmatrix},$$

ce qui donne (sans considérer l'effet de l'entrée)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & \frac{\alpha}{C} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, D = 0.$$

(iv) On calcule les valeurs propres de la matrice A ($\det(sI - A) = 0$) :

$$\begin{pmatrix} s & -1 \\ \frac{1}{LC} & s - \frac{\alpha}{C} \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff s^2 - \frac{\alpha}{C}s + \frac{1}{LC} = 0$$

ce qui donne les valeurs propres

$$s_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{C} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{C^2} - 4\frac{1}{LC}} \right).$$

i stable et de réponse impulsionnelle monotone si $\alpha < 0$ et $\frac{\alpha^2}{C^2} - 4\frac{1}{LC} > 0$, ce qui donne

$$\alpha < -2\sqrt{\frac{C}{L}},$$

ii stable et de réponse impulsionnelle oscillatoire si $\alpha < 0$ et $\frac{\alpha^2}{C^2} - 4\frac{1}{LC} < 0$, ce qui donne

$$-2\sqrt{\frac{C}{L}} < \alpha < 0,$$

iii instable et de réponse impulsionnelle monotone si $\alpha > 0$ et $\frac{\alpha^2}{C^2} - 4\frac{1}{LC} > 0$, ce qui donne

$$-2\sqrt{\frac{C}{L}} < \alpha,$$

iv instable et de réponse impulsionnelle oscillatoire si $\alpha > 0$ et $\frac{\alpha^2}{C^2} - 4\frac{1}{LC} < 0$, ce qui donne

$$0 < \alpha < -2\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Exercice 10 Août 2018

(i) — Entrée : $F, \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

— Sortie : $z, \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

(ii)

$$(M + b)\ddot{z} + c\dot{z} + kz = F.$$

(iii) Les variables d'état sont données par

$$x_1 = z, \quad x_2 = \dot{z}.$$

Les lois de mise-à-jour sont donc données par

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{M + b}(-kx_1 - cx_2 + F). \end{aligned}$$

La représentation d'état du système est dans ce cas donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k}{M+b} & \frac{-c}{M+b} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M+b} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = 0.$$

Les valeurs propres λ de la matrice A sont données par $\lambda I - A = 0$, ce qui donne

$$\lambda^2 + \frac{c}{M + b}\lambda + \frac{k}{M + b} = 0,$$

et donc

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4(M + b)k}}{2(M + b)}.$$

Le système est stable si $c > 0$.

- (iv) Le point d'équilibre est donné par $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{F}{k}, 0\right)$.
- (v) /
- (vi) Une réponse stable et oscillatoire correspond à des valeurs propres complexes dont la partie réelle est négative et la partie imaginaire non nulle.
 Dans le cas étudié, cela correspond à une valeur de c positive et telle que

$$c^2 - 4(M + b)k < 0.$$

Exercice 11 Janvier 2019

- (i) — Entrée : $u = F_{ext}, \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.
 — Sortie : $y = x, \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.
 — Variables d'état :
 — $x_1 = x, \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$,
 — $x_2 = \dot{x}, \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.
- (ii) — Mise-à-jour :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{-k_1}{m}x_1 - \frac{k_2}{m}x_1^3 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{u}{m}.\end{aligned}$$

— Loi de sortie :

$$y = x_1.$$

- (iii) Le système est temps-invariant car nous avons affaire à une équation différentielle ordinaire dont les paramètres ne dépendent pas du temps.
- (iv) Le système est non-linéaire (terme en x_1^3 .)
 Les points d'équilibre sont donnés par
 — PF1 : $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$.
 — PF2,3 : $(x_1^*, x_2^*) = \left(\pm\sqrt{\frac{-k_1}{k_2}}, 0\right), \text{sign}(k_1) \neq \text{sign}(k_2)$.

La représentation d'état du système linéarisé est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k_1}{m} - \frac{3k_2(x_1^*)^2}{m} & \frac{-c}{m} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, D = 0.$$

On a donc, aux différents points d'équilibre :

— PF1 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k_1}{m} & \frac{-c}{m} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, D = 0.$$

— PF2,3 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2k_1}{m} & \frac{-c}{m} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, D = 0.$$

- (v) — PF1 :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\frac{-c}{m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - 4\frac{k_1}{m}} \right).$$

— Stable et oscillatoire si $\frac{c^2}{m^2} - 4\frac{k_1}{m} < 0$, ce qui donne

$$k_1 > \frac{c^2}{4m}.$$

— Stable et monotone si $\frac{c^2}{m^2} - 4\frac{k_1}{m} > 0$ et $\frac{1}{2} \left(\frac{-c}{m} + \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - 4\frac{k_1}{m}} \right) < 0$, ce qui donne

$$0 < k_1 < \frac{c^2}{4m}.$$

— Instable si $\frac{1}{2} \left(\frac{-c}{m} + \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - 4\frac{k_1}{m}} \right) > 0$, ce qui donne

$$k_1 < 0.$$

— PF2,3 :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\frac{-c}{m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - 8\frac{k_1}{m}} \right).$$

— Stable et oscillatoire si $\frac{c^2}{m^2} - 8\frac{k_1}{m} < 0$, ce qui donne

$$k_1 < \frac{-c^2}{8m}.$$

— Stable et monotone si $\frac{c^2}{m^2} - 8\frac{k_1}{m} > 0$ et $\frac{1}{2} \left(\frac{-c}{m} + \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - 8\frac{k_1}{m}} \right) < 0$, ce qui donne

$$\frac{-c^2}{8m} < k_1 < 0.$$

— Instable si $\frac{1}{2} \left(\frac{-c}{m} + \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - 8\frac{k_1}{m}} \right) > 0$, ce qui donne

$$k_1 > 0.$$

(vi) On ne considère que l'évolution de x_1^* en fonction de k_1 . Pour une valeur positive de k_2 , les points fixes 2 et 3 n'existent que pour des valeurs négatives de k_1 . Le PF1, lui, existe pour toutes les valeurs de k_1 .

Pour $k_1 < 0$, trois points fixes coexistent. Les courbes des PF2 et PF3 ont l'allure de " $y = \pm\sqrt{-x}$ " et sont tracées en trait plein, ces points fixes étant stables pour $k_1 < 0$. Le PF1 est lui tracé en pointillé.

Pour $k_1 \geq 0$, seul le point fixe PF1 existe, et doit être tracé en trait plein car stable pour ces valeurs de k_1 .