

1 Concept

1.1 Point de vue mathématique

La *décomposition en série de Fourier* du signal $x(t)$ *périodique* (de période T) permet de représenter le signal périodique autrement que selon sa représentation habituelle avec le temps en abscisse. En effet, grâce aux coefficients de Fourier, on peut représenter le signal selon l'amplitude des différentes harmoniques et les déphasages (voir TP précédent). On travaille donc dans le domaine *fréquentiel* au lieu du domaine *temporel*.

Cependant, que faire si le signal n'est pas périodique ?

Si un signal n'est pas périodique, on peut utiliser une ruse mathématique en écrivant que la période du signal apériodique tend vers l'infini (" $T \rightarrow \infty$ ").

Cette astuce va permettre de démontrer le passage de la décomposition en série de Fourier à la transformée de Fourier.

Pour rappel, les formules obtenues pour les séries de Fourier sont (dans le cas où ce sont les coefficients qui sont normalisés et non la série - voir TP précédent pour plus de détails) :

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{x}_k e^{jk\omega t}$$
$$\hat{x}_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

La première équation peut se réécrire en multipliant et en divisant par T :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T \hat{x}_k \frac{1}{T} e^{jk \frac{2\pi}{T} t}.$$

On pose

$$\Delta l = \frac{1}{T}, \quad l_n = \frac{k}{T}, \quad \hat{x}_l = T \hat{x}_k.$$

La série de Fourier et les coefficients de Fourier se notent alors

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{x}_l e^{j2\pi l_n t} \Delta l$$
$$\hat{x}_l = T \hat{x}_k = \int_T x(t) e^{-j2\pi l_n t} dt.$$

Pour $T \rightarrow \infty$ (*i.e.* on considère un signal *apériodique*),

$$\Delta l \rightarrow dl \quad (\text{infinitésimal})$$

$$l_n \rightarrow l \quad (\text{la somme sur } k \text{ est effectuée pour chaque "petite parcelle" notée } l_n)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}$$
$$\int_T \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}$$

Ceci étant valable si l'expression est bien *intégrable* (cette condition prend tout son sens dans le prochain TP).

Les formules deviennent donc

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}_l e^{j2\pi lt} dl,$$

$$\hat{x}_l = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi lt} dt.$$

Attention que la première intégrale est par rapport à l et la deuxième par rapport à t ! Ces deux formules cachent en réalité celles de la transformée de Fourier. En effet, en notant que $l = f$, on met bien en évidence la fréquence

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df,$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt,$$

où $X(f)$ désigne la transformée de Fourier de $x(t)$ évaluée à la fréquence f .

On peut finalement faire intervenir la pulsation $\omega = 2\pi f$ et on obtient les expressions caractérisant la transformée inverse de Fourier et la transformée de Fourier $X(j\omega)$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Remarque ♡ : La *série* de Fourier est représentée à l'aide de son spectre fréquentiel *discret* caractérisé par des raies à chaque multiple de la fréquence fondamentale ($f_0 = 1/T$) du signal périodique de période T . Cela se voyait mathématiquement par la somme sur des valeurs de k discrètes indiquant la présence d'harmoniques. Or, pour la *transformée* de Fourier, la somme discrète a fait place à une intégrale. Le *spectre* fréquentiel () est donc *continu*.

1.2 Point de vue pratique

La transformée de Fourier est donc un outil pour passer du domaine temporel au domaine fréquentiel. Un même signal peut donc être représenté dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel, et on utilise la transformée pour faire le lien entre ces deux domaines. Notons que, quand on parle de domaine, on pourrait faire l'analogie entre donner l'adresse d'une maison (Allée de la découverte, 10, 4000 Liège) ou donner ses coordonnées GPS (50.6, 5.6). Les deux notations correspondent à l'institut Montefiore mais sont exprimées différemment.

Notions clés

- Comprendre la différence entre série et transformée de Fourier
- Pouvoir retrouver la formule de la transformée (développement présenté dans ce rappel)
- Comprendre que la formule $X(j\omega)$ donne le spectre fréquentiel d'un signal
- Savoir calculer la transformée de Fourier des différents signaux de base et utiliser la définition mathématique

2 Exercices résolus au tableau

Exercice 1

Calculer de manière analytique la transformée de Fourier de $x(t)$:

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{si } |t| \leq T/2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Schéma de résolution : transformée de Fourier

0- Dessiner le signal $x(t)$

1- Formule

2- Remplacer $x(t)$ par son expression analytique et en précisant les bornes d'intégration.

3- Résoudre :

$$x(t) \rightarrow X(f) = \frac{A}{\pi f} \sin(\pi f T)$$

En utilisant, la fonction $\text{sinc}(\cdot)$ définie par :

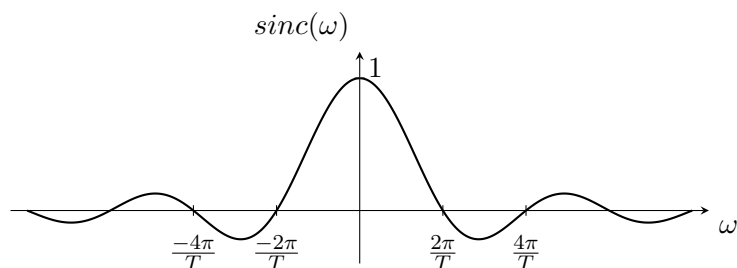
$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

on obtient :

$$X(f) = AT \text{sinc}(fT)$$

La fonction $\text{sinc}(x)$ (♥) a une propriété intéressante telle qu'en $x = 0$, on peut écrire grâce au théorème de l'Hospital :

$$\text{sinc}(0) = \frac{\sin(\pi 0)}{\pi 0} = 1$$



Exercice 2

(a) Tracer la transformée de Fourier $X(j\omega)$ en amplitude (sugg : sur Matlab, Python ou Desmos) de l'exercice n° 1 pour $A = 1$ et les différentes valeurs de T suivantes :

- cas 1 : $T=10$,

- cas 2 : $T=1$,

(b) Dédurre la transformée de Fourier de l'impulsion de Dirac.

Exercice 3

- (a) Calculer de manière analytique la transformée de Fourier de $x(t) = \cos(\omega_0 t)$.
- (b) Dessiner la transformée de Fourier $X(j\omega)$ en amplitude et en phase.
- (c) Comparer le domaine couvert par la transformée de Fourier de cette fonction trigonométrique et le domaine couvert par la transformée de Fourier de la fonction carrée de l'exercice 1.



Schéma de résolution : transformée de Fourier

- 0- Dessiner le signal $x(t)$
- 1- Formule
- 2- Remplacer $x(t)$ par son expression analytique et en précisant les bornes d'intégration.
- 3- Résoudre.

3 Exercices à faire

Exercice 4

- (a) Calculer de manière analytique la transformée de Fourier de $x(t)$:

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{si } t \in [0, T], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (b) Tracer la transformée de Fourier $X(j\omega)$ pour $T = 10$ et $A = 1$.
- (c) Comparer avec les réponses obtenues à l'exercice n° 1.

Exercice 5

- (a) Calculer de manière analytique la transformée de Fourier de :

$$x(t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t) & \text{si } t \in [-T/2, T/2], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $T = 20$ et $\omega_0 = 1$.

- (b) Tracer la transformée de Fourier obtenue de manière analytique sur Matlab/avec Python.
- ((c) Tracer la `fft` de la transformée sur Matlab.)
- (d) Exprimer $x(t)$ comme étant un produit de deux fonctions.
- (e) Dédire comment un produit de deux fonctions dans le domaine temporel est calculé lorsque l'on exprime ces fonctions à l'aide de leur transformée de Fourier.
- (f) Changer T et décrire comment le spectre fréquentiel évolue.

Exercice 6

- (a) Calculer analytiquement la transformée de Fourier de $x(t) = \sin(\omega_0 t)$.
- (b) Dessiner la transformée de Fourier en amplitude et en phase.

4 Pour s'exercer

Exercice 7 = Exercice 9.1 (a) [TXB]

Établir la transformée de Fourier du signal suivant :

$$x_1(t) = e^{-a|t|}, a > 0$$

Exercice 8

- (a) Calculer analytiquement la transformée de Fourier de l'impulsion de Dirac.
- (b) Dessiner la transformée de Fourier en amplitude et en phase.

Exercice 9 = Exercice 9.2 [TXB]

Choisir la bonne réponse : la transformée de Fourier de $x(t) = e^{2t} \mathbb{I}(t)$

- (i) n'existe pas.
- (ii) vaut $X(j\omega) = \frac{1}{j\omega-2}$.
- (iii) vaut $X(j\omega) = \frac{1}{j\omega+2}$.

5 Sources supplémentaires

https://www.princeton.edu/~cuff/ele301/files/lecture7_2.pdf
<https://web.stanford.edu/class/ee102/lectures/fourtran>
<https://www.youtube.com/watch?v=1JnayXHhjl&t=405s>
<https://www.youtube.com/watch?v=spUNpyF58BY>
<https://www.youtube.com/watch?v=IgF30X8nT0w>