TP 9 : Transformée de Laplace

*) Serie de Fourier :

$x(t)$ périodique $\longrightarrow x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{x}_k \exp\{j k \frac{2\pi}{T} t\}$

avec $\hat{x}_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \exp\{-jk \frac{2\pi}{T} t\}\, dt \subset \mathbb{C}$.

*) Transformée de Fourier:

$x(t)$ est intégrable $\longrightarrow X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp\{-j\omega t\}\, dt < +\infty$.

et $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) \exp\{j\omega t\}\, d\omega$

*) Transformée de Laplace :

$x(t)$ n'est pas intégrable $\longrightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp\{-st\}\, dt$

"Fourier"

$s = \sigma + j\omega$

"convergence"

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} X(s) \exp\{st\}\, ds$$

*) Le concept de "region of convergence" (RoC)

$$RoC_x = \{ s \in \mathbb{C} : \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp\{-st\} dt < +\infty \}$$

σ determine la RoC !

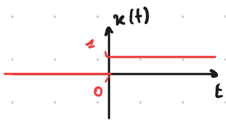
$\rightarrow$ ligne(s) verticale(s) dans le plan $\mathbb{C}$.

*) Il y a une table de propriétés !

$\rightsquigarrow$ Exam ü !

Exercice 0 :

a) $x(t) = \mathbb{1}(t)$

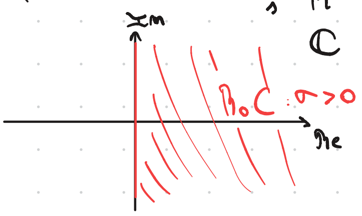


$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp\{-st\}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \exp\{-st\}\, dt$$

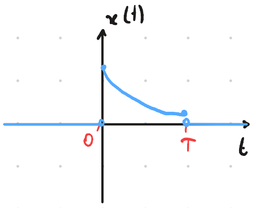
$\sigma \leq 0$: $\nexists$

$\sigma > 0$: $X(s) = \frac{-1}{s} \exp\{-st\} \Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{s}$



Exercice 2 :

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t} & , \text{si } t \in [0;T] \\ 0 & , \text{si } t \notin [0;T] \end{cases}$$



$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp\{-st\} dt$$

$$= \int_0^T e^{-t} e^{-st} dt$$

$$= \int_0^T e^{-(s+1)t} dt$$

$s = 1$: $= t\Big]_0^T = T$

$s \neq -1$: $= \frac{-1}{s+1} e^{-(s+1)t}\Big]_0^T = \frac{1-e^{-(s+1)T}}{s+1}$

⚠ ∃ !

RoC = $\mathbb{C}$.

x(t) est de durée finie et était intégrable !

Exercice 2 :

A partir de $\mathcal{L}\{\mathbb{1}(t)\}(s)$ et de la table :

c) $\mathcal{L}\{t\,\mathbb{1}(t)\}(s) = -\mathcal{L}\{t\,\mathbb{1}(t)\}(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{\mathbb{1}(t)\}(s) = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s} = +\frac{1}{s^2}$

linéarité

dérivée fréq.

RoC = $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\{s\} > 0\}$

g) $\mathcal{L}\{e^{-at}\cos(\omega_0 t)\mathbb{1}(t)\}(s) = \underbrace{\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\mathbb{1}(t)\}}_{Y(s)}(s+a) = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$ avec RoC $= \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\{s+a\} > 0\}$

$= \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\{s\} > -a\}$

décalage fréq.

⚠ décalage du RoC !

$s \in \mathrm{RoC}_x$ si $s+a \in \mathrm{RoC}_Y$

preuve par Euler !